Un punto del piano può essere individuato dalle sue coordinate cartesiane o anche dalle sue coordinate polari:

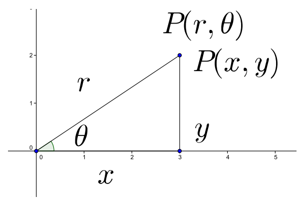


Figura 1

Per passare da coordinate polari a quelle cartesiane usiamo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

e, viceversa, per passare da coordinate cartesiane a quelle polari usiamo

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \mathrm{tg}\ \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{cases} \tag{2}$$

Esempi 0.1. Determinare le coordinate cartesiane del punto di coordinate polari $(4, \frac{2\pi}{3})$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = -2 \\ y = r\sin\theta = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} \end{cases} \tag{3}$$

Determinare le coordinate polari del punto di coordinate cartesiane $(2, -2)$.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8 \\ \mathrm{tg}\ \theta = \frac{y}{x} = -1 \end{cases} \tag{4}$$

da cui $r = 2\sqrt{2}$ (prendiamo il valore positivo) e per θ dobbiamo prendere $-\frac{\pi}{4}$ essendo il punto nel quarto quadrante.

Trasformare l'equazione cartesiana $x^2 = 4y$ in coordinate polari.

Abbiamo

$$\begin{aligned} x^2 &= 4y \\ (r\cos\theta)^2 &= 4(r\sin\theta) \\ r^2\cos^2\theta &= 4r\sin\theta \\ r &= 4\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \end{aligned} \tag{5}$$

Trasformare l'equazione polare $r = 5\sec\theta$ in coordinate cartesiane.

Abbiamo

$$\begin{aligned} r &= 5\sec\theta \\ r &= \frac{5}{\cos\theta} \\ r\cos\theta &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned} \tag{6}$$

si tratta dunque della retta verticale di equazione $x = 5$, cosa non ovvia dalla equazione polare.

Trasformare l'equazione polare $r = 2\sin\theta$ in coordinate cartesiane.

Moltiplichiamo l'equazione iniziale per r e calcoliamo

$$\begin{aligned} r^2 &= 2r\sin\theta \\ x^2 + y^2 &= 2y \\ x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ x^2 + (y-1)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

si tratta dunque di una circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1.

Trasformare l'equazione polare $r = 2 + 2\cos\theta$ in coordinate cartesiane.

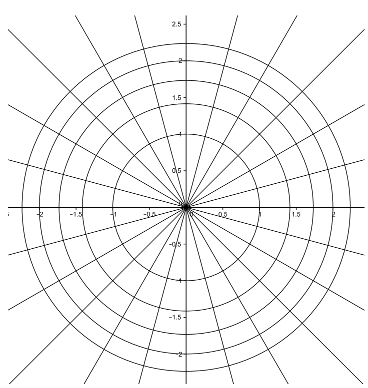
Moltiplichiamo l'equazione iniziale per r e calcoliamo

$$\begin{aligned} r^2 &= 2r + 2r\cos\theta \\ x^2 + y^2 - 2x &= 2r \\ (x^2 + y^2 - 2x)^2 &= 4r^2 \\ (x^2 + y^2 - 2x)^2 &= 4(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{8}$$

si tratta di una curva di equazione algebrica di quarto grado non facile da disegnare. Vedremo che sarà più agevole usare le coordinate polari per capirne il disegno.

Per aiutarci nel disegno di una curva in coordinate polari può essere utile pensare ad una "griglia polare" di coordinate come in figura

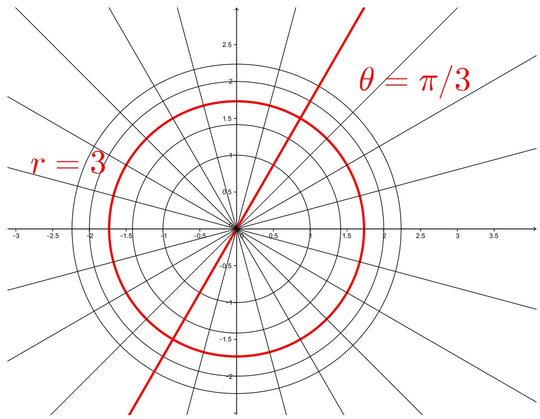
Figura 2



come fossero le coordinate geografiche della Terra vista dal polo nord.

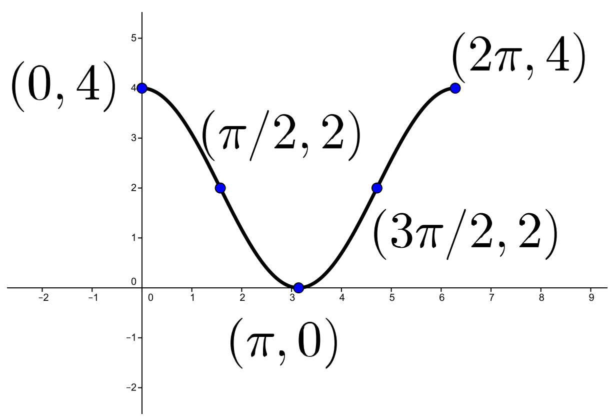
Risulta allora facile vedere che l'equazione polare $r = 3$ è la circonferenza di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 9$, mentre l'equazione polare $\theta = \frac{\pi}{3}$ ha per grafico la retta di equazione cartesiana $y = \sqrt{3}x$:

Figura 3



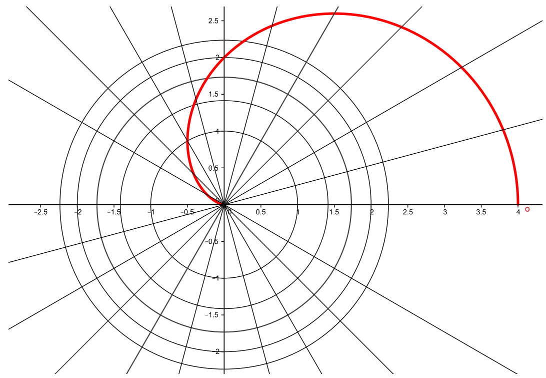
Proviamo così a disegnare la curva di equazione algebrica di quarto grado (8) usando direttamente l'equazione polare. Cominciamo disegnando il grafico cartesiano dell'equazione $r = 2 + 2\cos\theta$ ponendo θ sull'asse delle ascisse e r sull'asse delle ordinate. Otteniamo

Figura 4



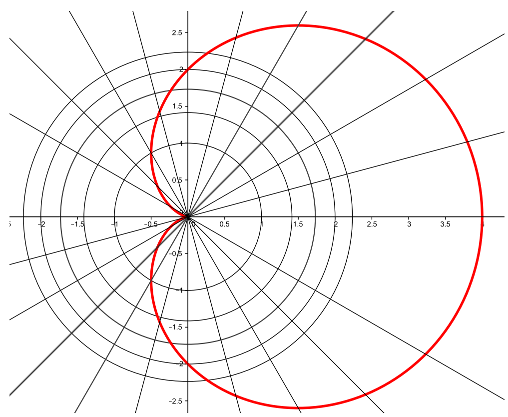
usiamo questo grafico come riferimento per capire i valori di r che corrispondono a valori crescenti di θ. Vediamo che mentre θ va da 0 a $\pi/2$ e poi a π, il valore di r, cioè la distanza del punto dall'origine, va da 4 a 2 fino a 0 e in corrispondenza il grafico polare descrive un arco come in figura

Figura 5



Mentre poi θ passa da π a 2π la distanza r cresce di nuovo fino ad arrivare a 4 ma ora i valori di θ sono maggiori di π e siamo nel semipiano negativo. La curva si chiude quindi come nella figura seguente:

Figura 6

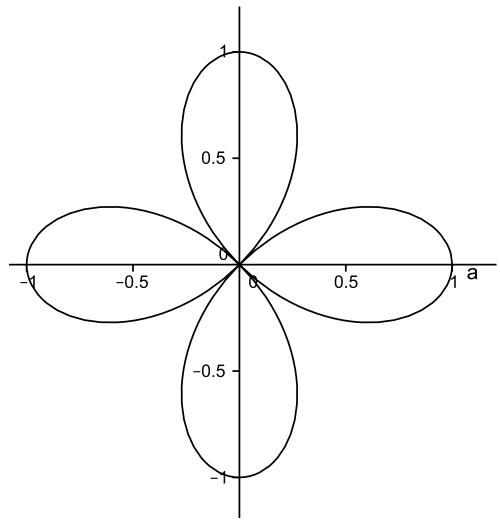


Questa curva viene detta **cardioide**. In generale, una cardioide si ottiene dalle equazioni polari

$$r = a(1 \pm \cos\theta) \quad \text{oppure} \quad r = a(1 \pm \sin\theta)$$

Esempio 0.2. Disegnare il grafico polare della curva di equazione $r = \cos 2\theta$.

Si ottiene la curva seguente:

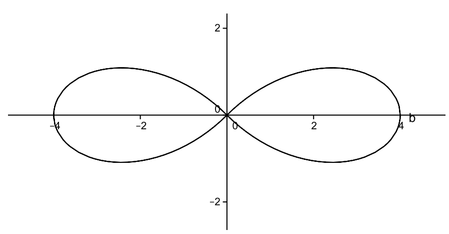


Quadrifoglio

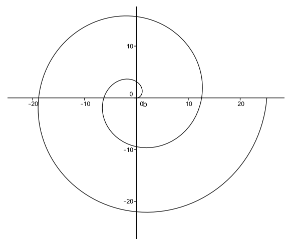
Esempio 0.3. Usare un computer o una calcolatrice grafica per disegnare il grafico polare della seguenti curve

1. $r = 1 + 2\cos\theta$
2. $r = \sin\theta + sin^3(5\theta/2)$
3. $r = \cos(2\theta/3)$
4. $r = 2\theta$
5. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

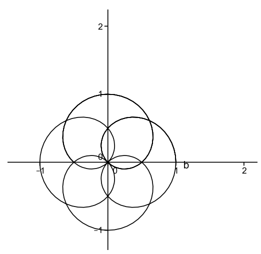
e associare ciascuna equazione con il suo grafico tra le figure seguenti



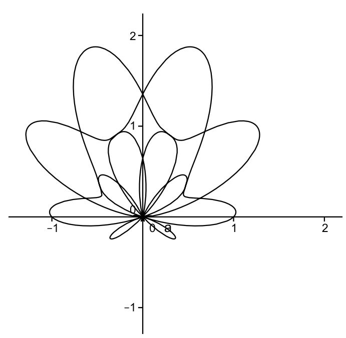
Lemniscata



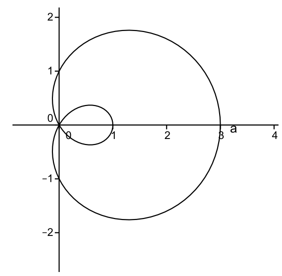
Spirale



Senza nome 1



Senza nome 2



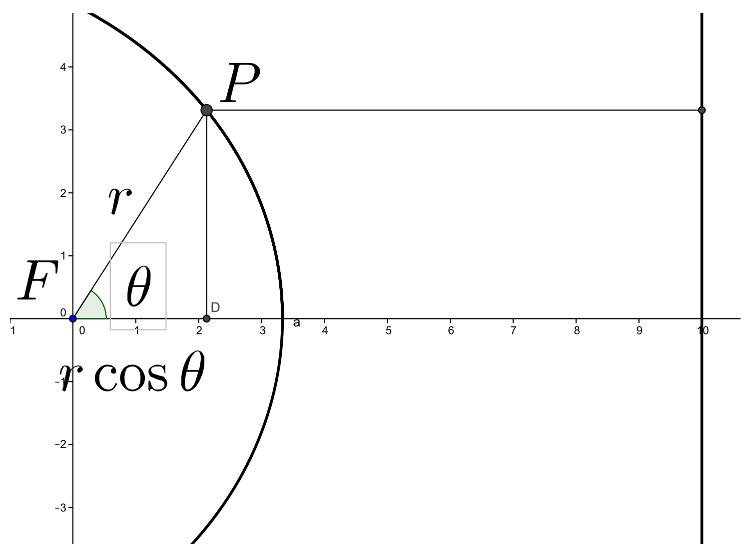
Chiocciola di Pascal

Passiamo ora ad esaminare le equazioni polari delle coniche.

Ricordiamo che le coniche possono essere definite dalla relazione

$$\frac{PF}{Pd} = e$$

e si distinguono a seconda che l'eccentricità e sia minore, uguale o maggiore di 1. Se ora prendiamo il fuoco F nell'origine delle coordinate ed usiamo le coordinate polari abbiamo



Figura

Vediamo che il punto P ha coordinate polari $r = PF$, proprio la distanza di P dal fuoco, e se la direttrice ha equazione $x = d$ allora la distanza di P dalla direttrice è proprio $d - r\cos\theta$. La relazione che definisce la conica diventa quindi

$$e = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
ed - er\cos\theta &= r \\
ed &= r + er\cos\theta \\
r &= \frac{ed}{1 + e\cos\theta}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

che è l'equazione della conica in forma polare. Essa si può ottenere anche nella forma

$$r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$$

se la direttrice è presa orizzontale invece che verticale.

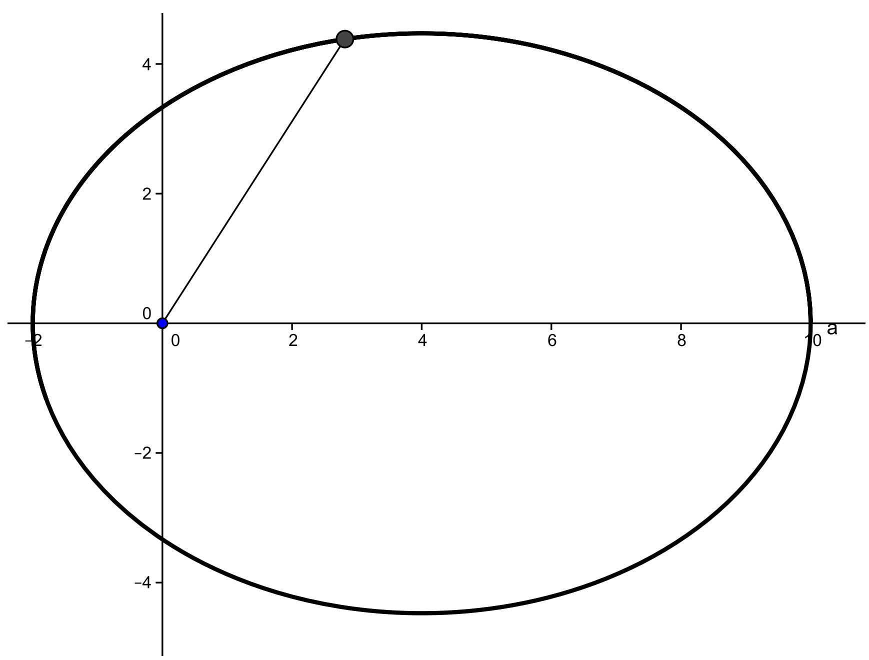
Esempi 0.4. La conica di equazione

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

è un'ellisse infatti, dividendo per 3 si ha la formula

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

da cui si vede che l'eccentricità è $\frac{2}{3} < 1$ e dunque si tratta di un'ellisse il disegno è



Figura

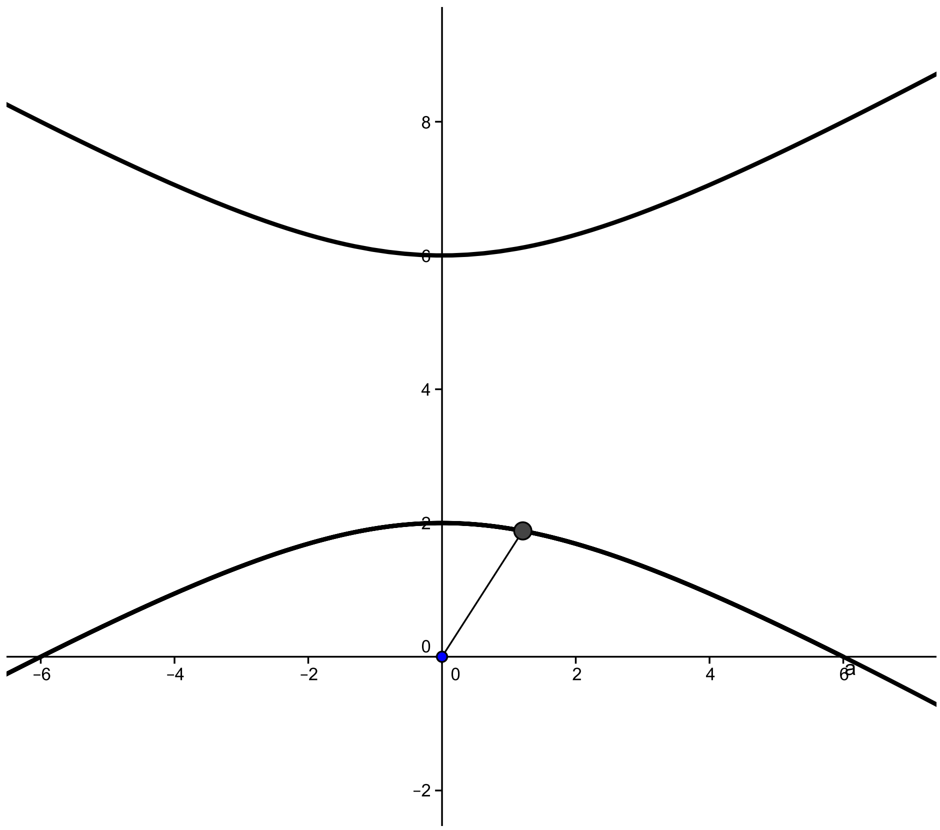
La conica di equazione

$$r = \frac{12}{2 + 4\sin\theta}$$

è un'iperbole infatti, dividendo per 2 si ha la formula

$$r = \frac{6}{1 + 2\sin\theta}$$

da cui si vede che l'eccentricità è $2 > 1$ e dunque si tratta di un'iperbole il disegno è



Figura