Ricordiamo che due proposizioni P e Q in matematica si dicono equivalenti se $P \implies Q$ e $Q \implies P$, in tal caso scriviamo $P \iff Q$ e si legge *P è equivalente a Q* oppure *P è vera se e solo se Q è vera* oppure *Condizione necessaria e sufficiente perché P sia vera è che Q sia vera.*

Teorema 3.6.11. *Se A è una matrice quadrata di ordine n, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *A è una matrice quadrata invertibile;*
2. *il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ ammette solo la soluzione nulla;*
3. *A è equivalente per righe alla matrice I_n;*
4. *il sistema $AX = B$ ammette un'unica soluzione, qualunque sia la scelta di B;*
5. *esiste una matrice C tale che $AC = I$*

Prima di affrontare la dimostrazione di questo teorema sarà opportuno fare qualche commento. Lo studente del primo anno di studi universitari trova nei corsi di geometria ed analisi i primi esempi di dimostrazione matematica. Le dimostrazioni possono essere facili o difficili, belle o brutte, e, soprattutto, possono aggiungere qualcosa alla comprensione dell'argomento oppure no. Non credo che sia saggio esporre uno studente principiante a dimostrazioni di ogni tipo, indiscriminatamente. Tuttavia ritengo che non si possa avere una comprensione sufficientemente approfondita di argomenti di matematica senza avere la minima idea di come condurre una dimostrazione. Il teorema in discussione è un esempio importante di come condurre una argomentazione generale. Dovendo qui dimostrare l'equivalenza logica di cinque enunciati, occorre procedere con ordine e con metodo per evitare giri viziosi e inconcludenti. Per questo scopo procederemo dimostrando che ciascun enunciato implica il successivo e che infine il quinto implica il primo, con il che chiudiamo il cerchio e concludiamo la dimostrazione. Questa è dunque la strategia della dimostrazione. Ad ogni passo diremo qual è l'ipotesi e quale la tesi.

Primo passo. Dimostriamo che se A è una matrice quadrata invertibile allora il SLO $AX = 0$ ammette solo la soluzione nulla. Per far ciò, prendo il sistema $AX = 0$ e moltiplico ambo i membri per la matrice inversa A^{-1}, che esiste per ipotesi, ottenendo

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}0 \\ (A^{-1}A)X &= 0 \\ X &= 0 \end{aligned}$$

cioè X è necessariamente zero. QED[1]

Secondo passo. Ora l'ipotesi è che il sistema $AX = 0$ ammette solo la soluzione nulla e vogliamo dimostrare che allora A è equivalente per righe a I_n. A tal fine considero la matrice A e applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan ne trovo la forma a scala ridotta che chiamiamo R. Ora voglio dimostrare che $R = I_n$. Ma infatti, se per assurdo $R \neq I$ R non avrebbe n pivot e quindi il sistema $AX = 0$ equivalente a $RX = 0$ avrebbe infinite soluzioni, contro l'ipotesi che invece di soluzioni ce n'è una sola. QED

Terzo passo. Ora invece suppongo che A sia equivalente per righe ad I_n e considero il sistema $AX = B$. Per risolvere questo sistema, secondo l'algoritmo di Gauss-Jordan, riduco la matrice completa $(A|B)$ nella sua forma a gradini ridotta che per ipotesi è $(I|B')$. Ciò significa allora che B' è l'unica soluzione del sistema, come desiderato. QED

Quarto passo. Come ipotesi ora prendo che il sistema $AX = B$ ammetta una ed una sola soluzione qualunque sia B. Voglio dimostrare che esiste una matrice C tale che $AC = I$. Il ragionamento che seguiamo ora è simile al ragionamento fatto nell'esempio 3.6.8. Introduco la notazione $E_1, E_2, \ldots, E_n$ per indicare, rispettivamente, la prima, la seconda, e così via, fino all'n-esima colonna della matrice I_n. Considero quindi gli n sistemi $AX = E_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ciascuno di essi, per ipotesi, ammette un'unica soluzione. Siano $C_1, C_2, \ldots, C_n$ le rispettive soluzioni, e costruiamo la matrice che ha queste soluzioni come colonne:

$$C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Abbiamo quindi

$$AC = A(C_1, C_2, \ldots, C_n) = (AC_1, AC_2, \ldots, AC_n) = (E_1, E_2, \ldots, E_n) = I$$

da cui la conclusione. QED

Quinto passo. Infine dobbiamo dimostrare che il quinto punto implica il primo. Occorre dimostrare che l'ipotesi che esista una matrice C con la proprietà che $AC = I_n$

---

[1] Classico simbolo di conclusione di una dimostrazione. Latino: *Quod erat demostrandum* = ciò che dovevasi dimostrare.

implica che anche $CA = I_n$ che è la "seconda metà" della definizione 3.6.7. Per dimostrare ciò, prendo la matrice C che esiste per ipotesi e considero il sistema

$$CX = 0 \tag{3.8}$$

Posso osservare che un tale SLO ammette solo la soluzione nulla. Infatti, se moltiplico ambo i membri dell'equazione 3.8 per A ottengo $A(CX) = 0$ da cui $(AC)X = 0$ ossia $X = 0$. Dunque il SLO $CX = 0$ ammette solamente la soluzione nulla. Per quanto visto sopra, applicando i ragionamente lì fatti alla matrice C, otteniamo che esiste allora una matrice C' tale che $CC' = I$. Ora però calcoliamo come segue

$$A = AI = A(CC') = (AC)C' = IC' = C'$$

Riassumendo, abbiamo visto che nell'ipotesi che $AC = I$ abbiamo trovato una C' tale che $CC' = I$ ma poiché $A = C'$ abbiamo $CA = I$ che era la conclusione desiderata. QED