0.1 Complemento ortogonale di un sottospazio

Esempio 0.1.1. Determinare una base ortogonale del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -1, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (4, 3, 2, 1)$.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = (2, 3, -1, 0) - \frac{4}{4}(1, 1, 1, 1) = (1, 2, -2, -1),$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1,$$

$$= (4, 3, 2, 1) - \frac{5}{10}(1, 2, -2, -1) - \frac{5}{2}(1, 1, 1, 1) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$$

Volendo, si può moltiplicare questo ultimo vettore per 2 ottenendo $(2, -1, 1, -2)$ che essendo un multiplo del vettore trovato sopra rimane comunque perpendicolare ai due vettori precedenti. In definitiva la base ortogonale cercata è

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, -2, -1), (2, -1, 1, -2)\}$$

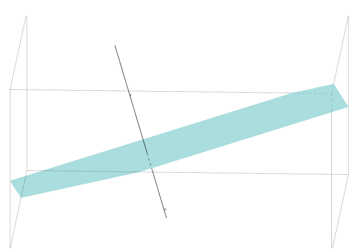
Se si vuole una base ortonormale e non solo ortogonale occorre ora normalizzare ciascun vettore della base trovata, ossia dividere ciascuno di essi per la propria norma. Si ottiene

$$\{\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, -2, -1), \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, -2)\}$$

Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, si definisce *complemento ortogonale* $U^\perp$ di U l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali a tutti i vettori di U:

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Esempio 0.1.2. Se U è il piano di V_3 passante per l'origine di equazione $x+y-3z = 0$, il complemento ortogonale di U è la retta passante per l'origine di parametri direttori $\ell = 1, m = 1, n = -3$.



Proposizione 0.1.3. *Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ allora $U^\perp$ è anch'esso un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Inoltre se U è generato da k vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, allora*

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = 0, \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Dimostrazione. Ovviamente $\mathbf{0} \in U^\perp$ e pertanto $U^\perp$ non è vuoto. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U^\perp$ allora

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}) = 0$$

per ogni $\mathbf{u} \in U$ e quindi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in U^\perp$.

Ancora: se $\mathbf{v} \in U^\perp$, allora $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = a0 = 0$ per ogni $\mathbf{u} \in U$ e pertanto $a\mathbf{v} \in U^\perp$, da cui il primo asserto.

Per la seconda affermazione, supponiamo che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = 0, \forall i = 1, \ldots, k$ e sia $\mathbf{u} \in U$. Per ipotesi, esistono dei coefficienti $a_1, \ldots, a_k$ tali che $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$. Avremo allora:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k) = a_1(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1) + \cdots + a_k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k) = 0,$$

cioè $\mathbf{v} \in U^\perp$. Viceversa, se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{u} \in U$, necessariamente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = 0, i = 1, \ldots, k$ in quanto $\mathbf{u}_i \in U$. □

Proposizione 0.1.4. *Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n$ è somma diretta di U e $U^\perp$:*

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp.$$

Dimostrazione. Se $U = \{\mathbf{0}\}$, allora $U^\perp = \mathbb{R}^n$ e l'asserto è ovvio. Sia $U \neq \{\mathbf{0}\}$ e sia $\mathbf{v} \in U \cap U^\perp$. Un tale vettore deve necessariamente soddisfare la relazione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$, in quanto è sia in U che nel suo complemento ortogonale, ma ciò implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per la proprietà (4) del prodotto scalare. Di conseguenza $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Rimane da verificare che ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ è somma di un vettore di U e di un vettore di $U^\perp$. Per tale scopo, sia $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormale di U. Si consideri il vettore

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\mathbf{u}_k$$

(*sviluppo di Fourier* di $\mathbf{v}$ rispetto alla base fissata). Il vettore $\mathbf{p}$ appartiene a U in quanto combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_i, i = 1, \ldots k$, ed è facile verificare che $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ è ortogonale a ciascun $\mathbf{u}_i, i = 1, \ldots k$,da cui appartiene a $U^\perp$ per la Proposizione 0.1.3. Essendo $\mathbf{v} = \mathbf{p} + (\mathbf{v} - \mathbf{p})$, si ha la tesi. □

Definizione 0.1.5. Assegnati U, sottospazio non nullo di $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ base ortogonale di U e $\mathbf{v}$ vettore di $\mathbb{R}^n$, definiamo *proiezione ortogonale* di $\mathbf{v}$ su U il vettore:

$$\mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\mathbf{u}_k.$$

Se la base è addirittura ortonormale la formula si semplifica in quanto nei vari denominatori abbiamo 1.

Osservazione 0.1.6. Possiamo dire che lo sviluppo di Fourier di un vettore rispetto ad un sottospazio coincide con la proiezione ortogonale di un vettore su quel sottospazio.

Esempio 0.1.7. Prendiamo il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ dell'esempio 0.1.1. Calcoliamo la proiezione del vettore $(1, -1, 2, 3)$ su U, o, detto altrimenti, calcoliamo il suo sviluppo di Fourier:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_U((1,-1,2,3))\\
&=[(1,-1,2,3)\cdot\frac{1}{2}(1,1,1,1)]\frac{1}{2}(1,1,1,1)\\
&+[(1,-1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1)]\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1)\\
&+[(1,-1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,1,-2)]\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,1,-2)\\
&=\frac{5}{4}(1,1,1,1)-\frac{8}{10}(1,2,-2,-1)-\frac{1}{10}(2,-1,1,-2)=(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{11}{4},\frac{9}{4})
\end{aligned}\tag{1}$$

Esempio 0.1.8. Con riferimento all'esercizio precedente scrivere le equazioni dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che associa ad ogni vettore (x_1,x_2,x_3,x_4) la sua proiezione ortogonale nel sottospazio U dell'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_U((x_1,x_2,x_3,x_4))\\
&=[(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\frac{1}{2}(1,1,1,1)]\frac{1}{2}(1,1,1,1)\\
&+[(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1)]\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1)\\
&+[(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,1,-2)]\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,1,-2)
\end{aligned}\tag{2}$$

Si verifica che il vettore generico così ottenuto è

$$\frac{1}{4}(3x_1+x_2+x_3-x_4,x_1+3x_2-x_3+x_4,x_1-x_2+3x_3+x_4,-x_1+x_2+x_3+3x_4)$$

le equazioni dell'endomorfismo sono quindi

$$\begin{cases}
y_1=\frac{1}{4}(3x_1+x_2+x_3-x_4)\\
y_2=\frac{1}{4}(x_1+3x_2-x_3+x_4)\\
y_3=\frac{1}{4}(x_1-x_2+3x_3+x_4)\\
y_4=\frac{1}{4}(-x_1+x_2+x_3+3x_4)
\end{cases}$$

Esempio 0.1.9. Continuiamo ad elaborare sull'esercizio precedente. In maniera analoga a quanto fatto per l'endomorfismo P_r di V_2, proiezione ortogonale sulla retta r, possiamo anche determinare la matrice della proiezione dell'esercizio precedente rispetto ad una base "adattata" al problema. Sia infatti $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ la base ortonormale di U ottenuta in precedenza. Calcoliamo preliminarmente $U^\perp$. Per far ciò dobbiamo calcolare tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano ortogonali a tutti i vettori di U. Osserviamo che un generico vettore di U si può scrivere $\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3$ ed è quindi sufficiente verificare che il prodotto scalare sia zero con ciascuno dei vettori della base di U. Abbiamo di conseguenza le seguenti equazioni:

$$\begin{cases}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1=0\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_2=0\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_3=0
\end{cases}$$

e cioè, posto $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha rango 3, perché infatti le tre righe della matrice dei coefficienti sono indipendenti, e quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Risolvendo questo sistema si trova la soluzione base $(1, -1, -1, 1)$ La base "adattata" al problema allora è la base ordinata $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, avendo posto $\mathbf{u}_4 = (1, -1, -1, 1)$. La matrice di P_U rispetto a questa base è infine

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La nozione di proiezione ortogonale può essere naturalmente interpretata anche come un modo per ottenere l'elemento più vicino ad un dato sottospazio. Geometricamente risulta intuitivamente ovvio che la distanza minima tra due insiemi o sottospazi si trova prendendo la direzione ortogonale cioè "la linea più breve". Questa interpretazione, tutto sommato banale, è di grande importanza. Data la grande flessibilità del concetto di spazio vettoriale o di spazio euclideo, come vedremo, è possibile inquadrare in tale situazione anche la questione di "approssimazione". Si pensi ad esempio alle misurazioni empiriche dei risultati di un qualche esperimento e al tentativo di riportare su un grafico i dati dell'esperimento. A volte è possibile capire l'andamento dei dati mediante un curva che meglio approssima i dati sperimentali.

Il teorema seguente rende precisa l'idea intuitiva a cui si accennava sopra.

Teorema 0.1.10. (Teorema di approssimazione) *Sia U un sottospazio non nullo di $\mathbb{R}^n$, e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora* $\mathrm{proj}_U(\mathbf{v})$ *è il vettore di U che "meglio approssima" $\mathbf{v}$, cioè:*

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{v})\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

per ogni $\mathbf{u} \in U$ diverso da $\mathrm{proj}_U(\mathbf{v})$.

Dimostrazione. Aggiungendo e sottraendo $\mathrm{proj}_U(\mathbf{v})$, il vettore differenza $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ può riscriversi $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) + \mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) - \mathbf{u}$. Osserviamo che il vettore $\mathrm{proj}(\mathbf{v})_U - \mathbf{u}$ appartiene ad U, in quanto differenza di vettori di U, mentre $\mathbf{v} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) \in U^\perp$ come si è visto nel corso della dimostrazione dalla Proposizione 0.1.4. Ciò significa che $\mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) - \mathbf{u}$ e $\mathbf{v} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{v})$ sono tra loro ortogonali. Si ha dunque

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{v})\|^2 + \|\mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) - \mathbf{u}\|^2$$

come si verifica facilmente sfruttando la perpendicolarità delle differenze a secondo membro. Essendo per ipotesi $\mathrm{proj}_U(\mathbf{v}) - \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, si ha $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 > \|\mathbf{v} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{v})\|^2$. $\square$