0.1 Circonferenza

Consideriamo una circonferenza di centro $P_0(x_0, y_0)$ e raggio r, cioè il luogo dei punti del piano $P(x, y)$ per i quali si verifica la relazione:

0.1.1. $$\overline{P_0P} = r.$$

La 0.1.1, espressa mediante la formula per la distanza tra due punti, diviene:

0.1.2. $$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r,$$

ovvero, elevando al quadrato ambo i membri:

0.1.3. $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Sviluppando si ottiene:

0.1.4. $$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

L'equazione della circonferenza di centro P_0 e raggio r è quindi:

0.1.5. $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

avendo posto nella 0.1.4

0.1.6. $$-2x_0 = a, \qquad -2y_0 = b, \qquad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c.$$

Viceversa, data una equazione 0.1.5 con

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0,$$

essa rappresenta una circonferenza. Di essa si può facilmente calcolare il centro e il raggio; dalle 0.1.6 discende infatti:

0.1.7. $$x_0 = -\frac{a}{2}, \qquad y_0 = -\frac{b}{2}, \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}.$$

Si noti infine che in particolare una circonferenza di centro l'origine $(0, 0)$ ha equazione del tipo:

0.1.8. $$x^2 + y^2 = r^2.$$

La stessa circonferenza, in coordinate polari, ha equazione $\rho = r$. Le sue equazioni parametriche sono

0.1.9. $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} .$$

Esempio 0.1.10. Determinare il centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 40 = 0$.

Soluzione. L'applicazione delle formule 0.1.6 fornisce immediatamente la soluzione: il centro è $C(-3, -2)$ e il raggio è $\sqrt{53}$. Oppure si può procedere col metodo di "completamento del quadrato" nel modo seguente. Riscriviamo l'equazione e aggiungiamo ad ambo i membri delle costanti opportune in modo da ottenere due quadrati di binomio:

$$\begin{gathered} x^2 + 6x + y^2 + 4y = 40 \\ (x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 4y + 2^2) = 40 + 3^2 + 2^2 \\ (x+3)^2 + (y+2)^2 = 53 \end{gathered} \tag{1}$$

da cui si legge immediatamente sia il centro che il raggio.

Esempio 0.1.11. Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1,-2)$, $B(3,-2)$, $C(5,-4)$.

Il problema può essere affrontato in più modi. Un primo metodo consiste nell'imporre ad una circonferenza generica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ di passare per ciascuno dei punti assegnati, ottenendo così il sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \\ 9 + 4 + 3a - 2b + c = 0 \\ 25 + 16 + 5a - 4b + c = 0 \end{cases},$$

che, risolto, fornisce $a = -4$, $b = 10$, $c = 19$, quindi l'equazione $x^2+y^2-4x+10y+19 = 0$.

Altrimenti si può risolvere l'esercizio con metodo più geometrico, utilizzando la ben nota proprietà del passaggio per il centro degli assi delle corde. La corda AB ha parametri direttori $l = 3-1 = 2$, $m = -2+2 = 0$. Il suo punto medio è $M = (2,-2)$. Il suo asse è quindi $x - 2 = 0$. La corda AC ha parametri direttori $l = 5 - 1 = 4$, $m = -4 + 2 = -2$, riducibili a $l = 2$, $m = -1$. Il suo punto medio è $M = (3,-3)$. Il suo asse è quindi $2(x-3) - 1(y+3) = 0$, cioè $2x - y - 9 = 0$. Intersecando i due assi, ovvero risolvendo il sistema $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}$, si ottiene il centro $P_0(2,-5)$ della circonferenza. Il raggio eguaglia la distanza $\overline{P_0A} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{10}$. La circonferenza ha quindi equazione $(x-2)^2+(y+5)^2 = 10$, equivalente all'equazione trovata per altra via.

Infine, si poteva scrivere la seguente equazione:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

che, nel caso i tre punti non siano allineati, fornisce direttamente l'equazione della circonferenza passante per i tre punti assegnati. Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 1 \\ 41 & 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

che sviluppato lungo la prima riga ci fornisce lo stesso risultato visto sopra. Si osservi che il complemento algebrico dell'elemento di posto $(1, 1)$ in questa matrice è esattamente il determinante di ordine 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

che risulta diverso da zero precisamente perchè i tre punti assegnati non sono allineati. Il valore di questo determinante, infatti, è un multiplo non nullo dell'area del triangolo individuato dai tre punti.

0.2 Coniche in equazione canonica. Introduzione

Supponiamo di aver fissato nel piano un punto F ed una retta d non passante per F. Vogliamo studiare il luogo dei punti P del piano per cui il rapporto tra la distanza PF di P da F e la distanza Pd dello stesso punto dalla retta d sia costante:

$$\frac{PF}{Pd} = e \tag{5}$$

La costante e viene detta *eccentricità*, la retta d si dice *direttrice* e il punto F si dice *fuoco*. Il luogo geometrico che risulta da questa costruzione viene detto **conica** o **sezione conica** e, in particolare, **ellisse**[1] se $0 < e < 1$; **parabola** se $e = 1$; **iperbole** se $e > 1$.

In quel che segue diamo delle equazioni algebriche, che saranno dette equazioni canoniche, di questi tre tipi di coniche.

0.3 Ellisse

Sia dunque dato un punto F e scegliamo il sistema di riferimento in modo tale che F abbia coordinate $F(c, 0)$, con $c > 0$. Sia e un valore positivo ma minore di 1, e si prenda come direttrice la retta d di equazione $x = \frac{c}{e^2}$. La condizione (5) si può riscrivere $PF = e(Pd)$ ed usando la formula per la distanza tra due punti e la formula per la distanza punto retta, questa si traduce in

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2 |x - \frac{c}{e^2}|^2 \tag{6}$$

e dunque

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= e^2(x^2 - 2\frac{c}{e^2}x + \frac{c^2}{e^4}) \\ (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2cx + 2cx &= \frac{c^2}{e^2} - c^2 \end{aligned} \tag{7}$$

[1]Ellisse, iperbole, parabola dal greco rispettivamente: "carenza", "eccesso", "confronto", si confronti con le corrispondenti figure retoriche.

ottenendo così
$$(1-e^2)x^2 + y^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2} \tag{8}$$

Osserviamo ora che, nella nostra ipotesi in cui $e < 1$, la costante $\frac{c^2(1-e^2)}{e^2} > 0$ e che quindi possiamo porre, per definizione, $b^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2}$. Dividendo ambo i membri di (8) per b^2 otteniamo
$$\frac{e^2}{c^2}x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

Posto inoltre $a^2 = \frac{c^2}{e^2}$ si ha infine
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

che è l'equazione canonica dell'ellisse.

Osserviamo che
$$a^2 - b^2 = c^2 \tag{11}$$

Infatti:
$$a^2 - b^2 = \frac{c^2}{e^2} - \frac{c^2(1-e^2)}{e^2} = \frac{c^2 - c^2 + c^2e^2}{e^2} = c^2$$

Posto inoltre $x = 0$ nell'equazione (10) si ha $y^2 = b^2$ e $y = \pm b$, e dunque i punti $(0, \pm b)$ appartengono all'ellisse. Posto anche $y = 0$ si ha, analogamente, che i punti $(\pm a, 0)$ appartengono all'ellisse. Poichè, infine, per definizione, $a^2 = \frac{c^2}{e^2}$ allora $a = \frac{c}{e}$ e l'equazione della direttrice si può anche scrivere $x = \frac{a}{e}$.

La curva risulta simmetrica rispetto agli assi x, y (che si dicono *assi* dell'ellisse). Infatti se un punto $P(x, y)$ soddisfa l'equazione, anche i punti $P'(x, -y)$, $P''(-x, y)$, $P'''(-x, -y)$ la soddisfano, essendo le variabili x, y elevate al quadrato.

Gli assi incontrano l'ellisse nei punti $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$, che si dicono *vertici*. I segmenti AA', BB' vengono anch'essi chiamati *assi* dell'ellisse.

Osservazione 0.3.1. Se $a = b$, l'equazione 10 diventa $x^2 + y^2 = a^2$, equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio a.

Riassumiamo alcuni dati importanti di un'ellisse nell'ipotesi che risulti $a > b$, altrimenti nelle definizioni che seguono occorre scambiare a con b, x con y.

Definizione 0.3.2. Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, si definiscono per l'ellisse:

fuochi i punti $F(c, 0), F'(-c, 0)$,

eccentricità il valore $e = \dfrac{c}{a}$,

direttrici le rette $d : x = a/e$, $d' : x = -a/e$.

Teorema 0.3.3. *L'ellisse è il luogo dei punti P del piano tali che la somma delle loro distanze dai due fuochi sia costante ed uguale alla lunghezza dell'asse maggiore:*
$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a.$$

Dimostrazione. Un punto $P(x, y)$ soddisfa la condizione assegnata se e solo se:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

da cui si ottiene l'equazione 10 con semplici passaggi algebrici e ricordando che $c^2 = a^2 - b^2$. □

L'equazione dell'ellisse si trasforma in coordinate polari:

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}=1,$$

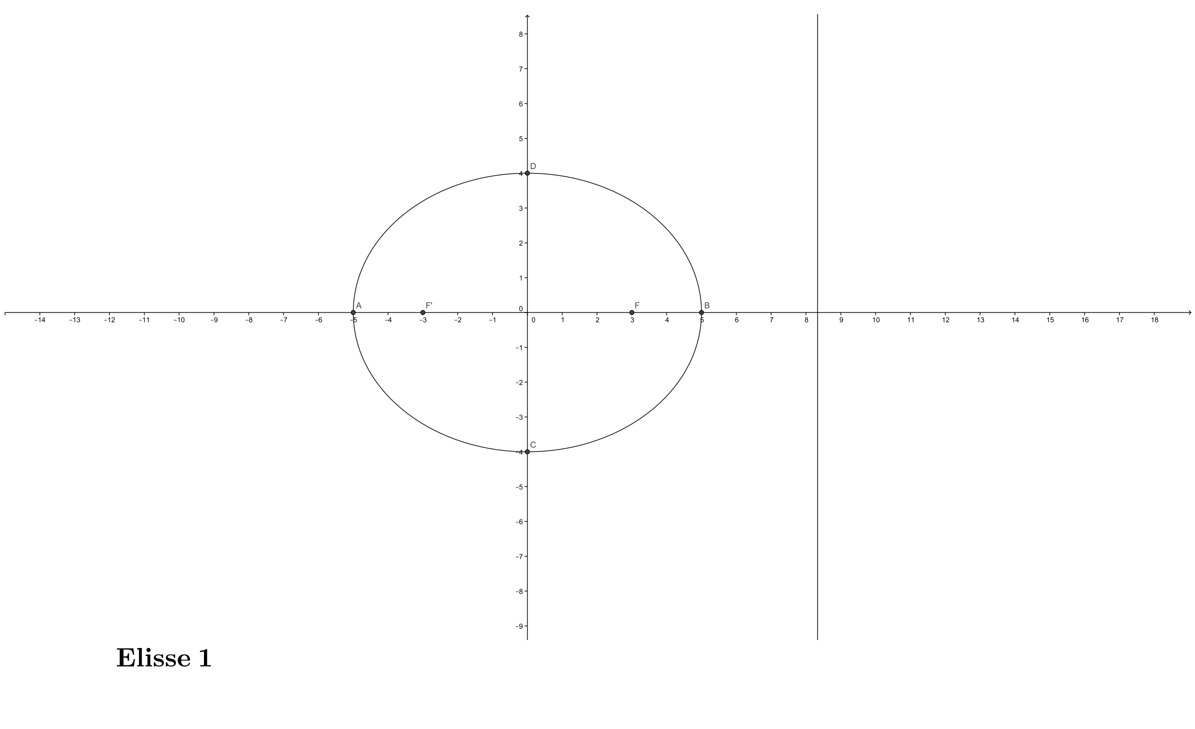
ovvero:

$$\rho=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}.$$

Esempio 0.3.4. Fissiamo il punto $F(3, 0)$ e la costante $e = \frac{3}{5} < 1$. La direttrice d ha equazione $x = \frac{25}{3}$. Calcoliamo $a^2 = \frac{c^2}{e^2} = 25$ e $b^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2} = 9\frac{16}{25}\frac{25}{9} = 16$. L'equazione canonica è dunque

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Possiamo tracciare la curva nella figura che segue:

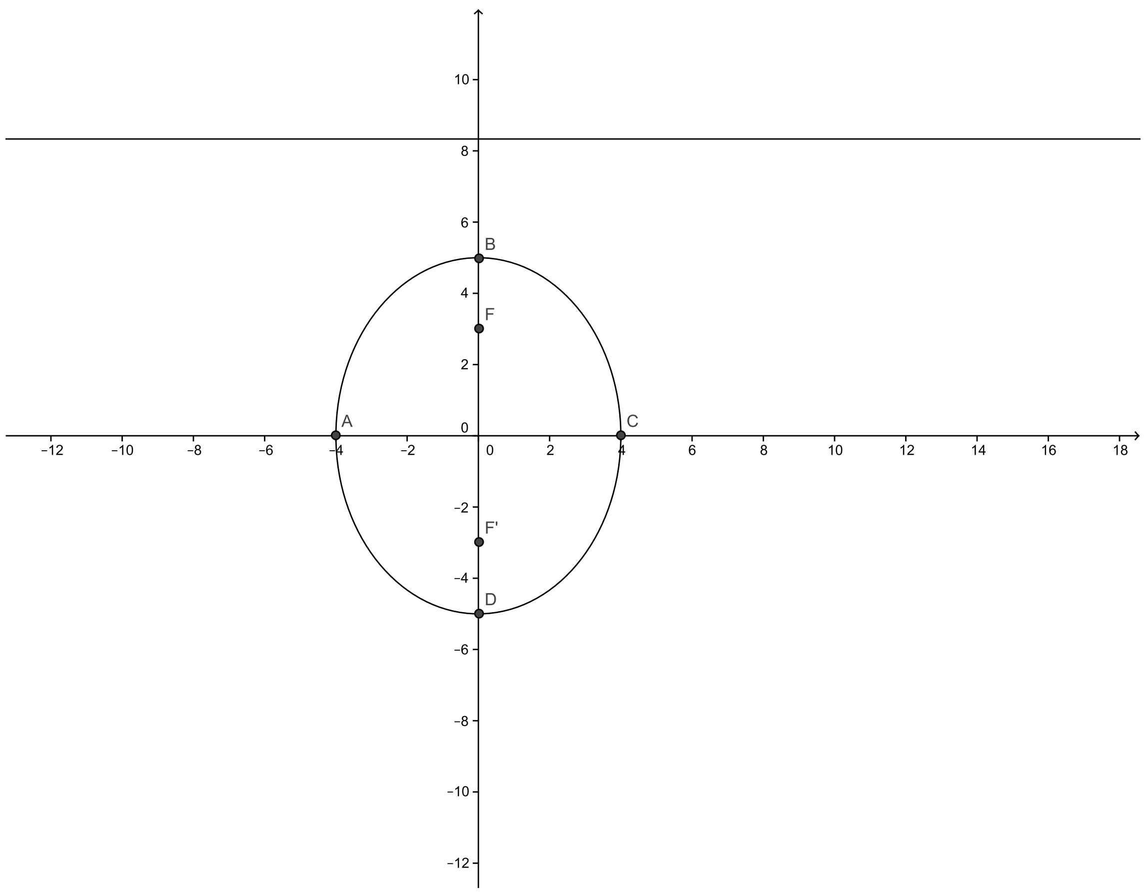


Elisse 1

Attenzione: se prendiamo l'equazione

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

abbiamo la seguente ellisse



Elisse 2