

0.1 Condizione sufficiente di diagonalizzabilità

È naturale porsi il problema di sapere se ogni matrice sia o meno diagonalizzabile.

Abbiamo due potenziali fonti di problematiche, che esemplifichiamo con due esempi scelti allo scopo.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha polinomio caratteristico $c_A(x) = x^2 + 1$ che ha radici non reali e quindi siamo costretti a trattare, volenti o nolenti, con i numeri complessi.

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è invece $c_B(x) = x^2$, con radici nulle. Ora si vede che questa matrice non può essere diagonalizzabile. Infatti, abbiamo visto che se una matrice è diagonalizzabile, la corrispondente matrice D , che a volte si dice *la forma diagonale* di A , presenta, sulla diagonale principale gli autovalori di A . Nell'esempio in questione, gli autovalori sono nulli. L'eventuale forma diagonale sarebbe quindi la matrice nulla e avremmo

$$P^{-1}BP = 0$$

da cui deduciamo $B = 0$ che è un assurdo perché B non è nulla.

Vediamo quindi che da un lato ci sono matrici, a coefficienti reali, che hanno autovalori complessi. Dall'altro abbiamo matrici che non sono diagonalizzabili, pur avendo autovalori reali.

Come riconoscere se una matrice è diagonalizzabile o meno?

Una prima, importante, condizione sufficiente, ma come vedremo non necessaria, è che gli autovalori siano distinti. Per capire questa condizione, ci occorre un

Lemma 0.1.1. *Se $X_1, X_2, \dots, X_k$ sono autovettori di autovalori distinti, rispettivamente, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ per una matrice A , allora l'insieme $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ è libero.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di vettori k . Se $k = 1$ abbiamo un unico vettore X relativo ad un unico autovalore λ e l'insieme $\{X\}$ è libero in quanto il vettore X è diverso da zero per definizione. Supponiamo vero l'enunciato per un numero $k - 1$ di vettori, e consideriamo un insieme con k vettori come nell'enunciato. Vogliamo dimostrare che essi sono linearmente indipendenti. Consideriamo pertanto una loro combinazione lineare posta uguale a zero e dimostriamo che i coefficienti allora devono essere nulli:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k = 0 \tag{1}$$

Moltiplichiamo 1 per A otteniamo

$$a_1AX_1 + a_2AX_2 + \dots + a_kAX_k = 0 \tag{2}$$

e quindi

$$a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \cdots + a_k\lambda_kX_k = 0 \quad (3)$$

perché per ipotesi essi sono autovettori. Se invece moltiplichiamo 1 per λ_1 otteniamo

$$a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_1X_2 + \cdots + a_k\lambda_1X_k = 0 \quad (4)$$

Ora sottraiamo la 4 dalla 3 otteniamo

$$(a_1\lambda_1X_1 - a_1\lambda_1X_1) + (a_2\lambda_2X_2 - a_2\lambda_1X_2) + \cdots + (a_k\lambda_kX_k - a_k\lambda_1X_k) = 0 \quad (5)$$

ossia

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_1)X_k = 0 \quad (6)$$

Per ipotesi induttiva, questa relazione implica che

$$\begin{aligned} a_2(\lambda_2 - \lambda_1) &= 0 \\ a_3(\lambda_3 - \lambda_1) &= 0 \\ &\vdots \\ a_k(\lambda_k - \lambda_1) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Poiché gli autovalori sono per ipotesi tutti distinti $(\lambda_2 - \lambda_1), (\lambda_3 - \lambda_1), \dots, (\lambda_k - \lambda_1)$ sono tutti non nulli. Di conseguenza, devono essere nulli $a_2, a_3, \dots, a_k$. Torniamo quindi alla relazione 1 che diventa

$$a_1X_1 = 0$$

ed essendo per ipotesi $X_1 \neq \mathbf{0}$ ne segue necessariamente che $a_1 = 0$. Così completiamo la dimostrazione per induzione che i vettori dati sono linearmente indipendenti. Come richiesto. $\square$

La condizione di questo teorema però è solo sufficiente. Esistono infatti matrici con autovalori multipli che sono tuttavia diagonalizzabili. Basti pensare a matrici diagonali, e dunque necessariamente diagonalizzabili, con elementi ripetuti sulla diagonale, come ad esempio l'identità I . Questa matrice ha polinomio caratteristico $c_I(x) = (x - 1)^n$ e quindi lo stesso autovalore ripetuto n volte e ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è un autovettore per I .

Vediamo un esempio più interessante.

Esempio 0.1.2. Calcolare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stabilire se A è diagonalizzabile o meno. Calcoliamo l'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 \\ -3 & \lambda & 3 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda[(\lambda + 1)^2 - 1] = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2) \end{aligned} \quad (8)$$

Si ottiene quindi un autovalore doppio $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ed uno semplice $\lambda_3 = -2$. Studiamo il SLO di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1 e quindi il SLO si riduce ad una singola equazione $x - z = 0$. La variabile dominante, corrispondente al pivot, è x . Le altre due sono parametri. Poniamo $y = s, z = t$ l'insieme delle soluzioni è quindi $\{(t, s, t)^T, s, t \in \mathbb{R}\}$ ed una base dell'autospazio $E_0(A)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Infine, studiamo l'autospazio $E_{-2}(A)$. Studiamo il SLO di matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Posto $z = t$, abbiamo

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Una base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Consideriamo infine la matrice P che ha per colonne i vettori delle basi così trovate

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che questa matrice è invertibile e si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: Nel fare questa verifica a mano è più agevole verificare che $AP = PD$ evitando di dover calcolare l'inversa.

Riassumendo: se una matrice ha autovalori distinti, allora essa è diagonalizzabile. Tuttavia, esistono matrici con autovalori ripetuti che sono ugualmente diagonalizzabili.

Ci domandiamo se esista dunque una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzazione che si possa usare per studiare una matrice assegnata.

A tale scopo introduciamo delle definizioni.

Definizione 0.1.3. Si dice *molteplicità algebrica* di un autovalore λ la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $c_A(x)$. Si dice *molteplicità geometrica* di λ invece la dimensione del relativo autospazio: $\dim E_\lambda(A)$.

Possiamo ora enunciare un teorema che ci dà una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzazione, di cui vedremo la dimostrazione in un capitolo di approfondimenti.

Teorema 0.1.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A sia diagonalizzabile è che per ciascun autovalore λ si abbia che la molteplicità algebrica di λ coincida con la sua molteplicità geometrica.*

Nell'esempio precedente, l'autovalore nullo ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 2 e l'autovalore -2 ha molteplicità algebrica e geometrica 1.

Nel caso della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ abbiamo invece un solo autovalore, quello nullo, di molteplicità algebrica 2, mentre la sua molteplicità geometrica è 1. Questa matrice, infatti, non è diagonalizzabile.

Esempio 0.1.5. Determinare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e trovare la matrice diagonalizzante.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & \lambda - 6 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

La matrice ha un autovalore di molteplicità (algebrica) 2, e due autovalori semplici. È facile vedere che gli autovalori semplici hanno molteplicità geometrica 1. Andiamo a calcolare la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$. Occorre studiare il SLO con matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

È evidente che questa matrice ha rango 2, perché ci sono solo due righe linearmente indipendenti, o anche perché la sua forma a scala è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché ha rango 2, il Teorema di Rouché-Capelli implica che lo spazio delle soluzioni ha dimensione $4 - 2 = 2$. Dunque la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica e possiamo concludere che la matrice è diagonalizzabile con forma diagonale $\text{diag}(3, 3, 6, -2)$. Per trovare la matrice diagonalizzante P occorre risolvere tre diversi SLO. Troveremo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$