

0.1 Definizione e prime proprietà

La nozione generale di spazio vettoriale è data sul modello della definizione di spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. In generale, sia V un insieme su cui è definita una operazione indicata con $+$ che sia commutativa, associativa, si supponga che esista un elemento neutro per questa operazione che denoteremo $\mathbf{0}$; si supponga inoltre che per qualunque elemento $\mathbf{v} \in V$ esista un elemento $-\mathbf{v} \in V$ con la proprietà che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, diremo allora che $(V, +)$ è un gruppo abeliano. Sia inoltre $(K, +, \cdot)$ un campo. K sarà nel seguito quasi sempre $\mathbb{R}$, tuttavia può a volte essere preso $K = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{Q}$ o altro. Diremo *prodotto esterno* di K per V un'operazione tra K e V a valori in V , cioè un'applicazione $\omega : K \times V \rightarrow V$. In luogo di scrivere $\omega((k, \mathbf{v})) = \mathbf{w}$, scriveremo anche $k\mathbf{v} = \mathbf{w}$ e useremo il termine *prodotto di k per $\mathbf{v}$* .

Se V è un gruppo abeliano, K è un campo ed ω è un prodotto esterno di K per V , diremo che la terna (V, K, ω) è uno *spazio vettoriale* sul campo K , se essa verifica gli assiomi seguenti:

$$(hk)\mathbf{v} = h(k\mathbf{v}) \forall h, k \in K, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1)$$

$$(h + k)\mathbf{v} = h\mathbf{v} + k\mathbf{v} \forall h, k \in K, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2)$$

$$h(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = h\mathbf{v} + h\mathbf{w} \forall h \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \quad (3)$$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4)$$

dove il simbolo “1” che compare nella 4 denota l'elemento neutro moltiplicativo del campo K .

Se $V = (V, K, \omega)$ è uno spazio vettoriale sul campo K , diremo *vettori* gli elementi di V e diremo *scalari* gli elementi di K . D'ora in poi uno spazio vettoriale (V, K, ω) sarà denotato semplicemente, ove non sussistano ambiguità, con il suo insieme di vettori V . Il concetto di “vettore” viene quindi esteso a significare qualunque elemento di uno spazio vettoriale e non già solo gli elementi di V_2 o V_3 .

Risultano individuati lo scalare nullo 0 ed il vettore nullo $\mathbf{0}$, elemento neutro del gruppo $(V, +)$. Diamo ora alcune proposizioni di carattere elementare che sono di facile dimostrazione.

Proposizione 0.1.1. *Se V è uno spazio vettoriale sul campo K , allora il prodotto dello scalare nullo per un vettore è il vettore nullo, cioè:*

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Dimostrazione. Dall'esistenza dell'elemento opposto nel gruppo additivo $(V, +)$ e dalle 2, 4 discende:

$$0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 1\mathbf{v} - \mathbf{v} = (0 + 1)\mathbf{v} - \mathbf{v} = 1\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad \square$$

Proposizione 0.1.2. *Se V è uno spazio vettoriale sul campo K , allora il prodotto di uno scalare per il vettore nullo è il vettore nullo, cioè:*

$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \forall k \in K.$$

Dimostrazione. A norma della proposizione precedente e della 1, $\forall \mathbf{v} \in V$, si ha:

$$k\mathbf{0} = k(0\mathbf{v}) = (k0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad \square$$

Proposizione 0.1.3. *Il prodotto di uno scalare $k \in K$ per un vettore $\mathbf{v} \in V$ è il vettore nullo se e solo se uno almeno tra k e $\mathbf{v}$ è nullo.*

Dimostrazione. Supponiamo che risulti: $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $k \neq 0$, per la Proposizione 0.1.2, moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza precedente per k^{-1} , otteniamo: $k^{-1}(k\mathbf{v}) = k^{-1}\mathbf{0}$. D'altra parte, per la 1 e la 4, si ha $k^{-1}(k\mathbf{v}) = (k^{-1}k)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ da cui si deduce $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

Proposizione 0.1.4. *Se V è uno spazio vettoriale sul campo K , allora il prodotto dell'opposto dell'unità moltiplicativa di K per un vettore $\mathbf{v}$ è l'opposto di $\mathbf{v}$, cioè:*

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Dimostrazione. Dalle Proposizioni 0.1.1, 2 e 4, si ha, $\forall \mathbf{v} \in V$:

$$(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (-1 + 1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad \square$$

0.2 Esempi

Esempio 0.2.1. Assegnato un campo K , sia $V = K^n$, n -ma potenza cartesiana di K , ovvero la totalità delle n -ple ordinate di elementi di K . Se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ sono due elementi di K^n , è possibile definire la loro somma nel modo che segue:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n). \quad (5)$$

È poi possibile definire il prodotto esterno ω di uno scalare $k \in K$ per l'elemento $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ nel modo seguente:

$$k\mathbf{x} = (kx_1, \dots, kx_n). \quad (6)$$

Con tali definizioni di somma in K^n e di prodotto di un elemento di K per un elemento di K^n , è facile provare che:

Proposizione 0.2.2. *La terna (K^n, K, ω) è uno spazio vettoriale.*

Lo spazio vettoriale (K^n, K, ω) verrà nel seguito denotato più semplicemente con il simbolo K^n . Quando $K = \mathbb{R}$ ricadiamo nella definizione di $\mathbf{R}^n$.

Esempio 0.2.3. L'insieme $M(m \times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali $m \times n$, dotato delle operazioni di somma tra matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice fornisce un altro esempio di spazio vettoriale.

Esempio 0.2.4. Se K è un campo, sia $K[x]$ l'insieme dei polinomi in una indeterminata x a coefficienti in K . Rispetto all'ordinaria somma “+” tra polinomi, la coppia $(K[x], +)$ è un gruppo abeliano; se poi ω è l'ordinario prodotto di un elemento di K per un polinomio, la terna $(K[x], K, \omega)$ risulta uno spazio vettoriale sul campo K ; tale spazio sarà nel seguito denotato solo con $K[x]$.

Esempio 0.2.5. Se F è l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale, f e g sono due elementi di F , è possibile definire la somma $f + g$ nel modo che segue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x). \quad (7)$$

con tale definizione di somma la coppia $(F, +)$ risulta un gruppo abeliano, il cui elemento neutro è la funzione costante identicamente nulla ed in cui l'opposto della funzione f è la funzione $-f$, così definita:

$$(-f)(x) = -f(x). \quad (8)$$

Possiamo poi introdurre il prodotto esterno ω definendo, $\forall k \in \mathbb{R}, \forall f \in F$:

$$(kf)(x) = kf(x). \quad (9)$$

Con tale definizione la terna $(F, \mathbb{R}, \omega)$ risulta uno spazio vettoriale sul campo reale.

Esempio 0.2.6. Altri esempi di spazio vettoriale sul campo $K = \mathbb{R}$, già incontrati nella prima parte del presente testo, sono dati dagli insiemi V_2 e V_3 dei vettori liberi del piano e dello spazio euclideo, rispettivamente, dotati delle operazioni di somma e di prodotto per un numero reale.

Esempio 0.2.7. Consideriamo un insieme con un unico elemento che indichiamo con $\mathbf{0}$ e un fissato campo K , definiamo la somma come $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e il prodotto esterno:

$$k\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall k \in K.$$

La terna $(\{\mathbf{0}\}, K, \omega)$ è evidentemente uno spazio vettoriale su K , detto *spazio nullo* su K .

Esempio 0.2.8. Sia $\mathbb{R}_+$ l'insieme di tutti i numeri reali positivi. Supponiamo che, dati $u, v \in \mathbb{R}_+$, la “somma” $u + v$ significhi il prodotto uv , si può allora verificare che le proprietà di associatività, commutatività, esistenza dell'elemento neutro e opposto sono tutte valide purché, ovviamente, per $\mathbf{0}$ si intenda 1 e per “opposto” si intenda “reciproco”. Stabiliamo ora di definire un prodotto esterno del campo reale $\mathbb{R}$ con i “vettori” elementi di $\mathbb{R}_+$ tramite la formula $\lambda v = v^\lambda$. Possiamo allora verificare che le proprietà richieste (v. 1, 2, 3, 4) sono verificate. Nel nostro caso le proprietà da verificare sono le seguenti

- $v^{hk} = (v^k)^h$;
- $v^{h+k} = v^h v^k$;
- $(vw)^h = v^h w^h$;
- $v^1 = v$.

e sono tutte chiaramente vere. Dunque $\mathbb{R}_+$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale reale.

Esempio 0.2.9. Sia $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Comunemente una tale successione è denotata con il simbolo $\{a_n\}$ dove a_n è il numero reale corrispondente al numero naturale n . Con le operazioni di somma termine a termine, cioè $(a + b)(n) = a_n + b_n$ e prodotto esterno $\lambda a, \lambda \in \mathbb{R}$ definito da $\lambda a(n) = \lambda a_n$ si verifica facilmente che questo è uno spazio vettoriale.

Le nozioni di dipendenza e indipendenza lineare di un insieme di vettori di uno spazio vettoriale qualunque sono del tutto analoghe a quelle viste in precedenza.

Aggiungiamo un esempio sulla indipendenza lineare a quelli dati nel Capitolo ??.

Esempio 0.2.10. Sia F lo spazio vettoriale delle funzioni reali di una variabile reale. Le due funzioni $\sin$ e $\cos$ sono linearmente indipendenti come vettori di F . Mostriamo infatti che se $a \sin + b \cos$, (ove a, b sono numeri reali) è la funzione identicamente nulla $\mathbf{0}$, allora necessariamente $a = b = 0$. Se

$$a \sin + b \cos = \mathbf{0}, \quad (10)$$

allora è:

$$(a \sin + b \cos)(x) = \mathbf{0}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Pertanto, deve essere

$$a \sin(x) + b \cos(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Dalla 12, posto $x = 0$, si trae $a \sin(0) + b \cos(0) = 0$, cioè $b = 0$; ponendo invece $x = \pi/2$, otteniamo $a \sin(\pi/2) + b \cos(\pi/2) = 0$, cioè $a = 0$.

Anche le nozioni di sottospazio e di generatori di un sottospazio sono analoghe e non le ripeteremo.

Se I è un insieme di indici, sia $\{W_i : i \in I\}$ una famiglia di sottospazi dello spazio vettoriale V . Per l'intersezione dei sottospazi della famiglia, proveremo ora che:

Proposizione 0.2.11. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $\mathcal{F} = \{W_i : i \in I\}$ è una famiglia di sottospazi di V , allora l'intersezione dei sottospazi della famiglia $\mathcal{F}$ è un sottospazio di V , cioè:*

$$\forall i \in I, \quad W_i \leq V \implies \bigcap_{i \in I} W_i \leq V. \quad (13)$$

Dimostrazione. Il vettore nullo $\mathbf{0}$ appartiene a ogni sottospazio $W_i, i \in I$ della famiglia e quindi appartiene all'intersezione, che dunque è non vuota:

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{i \in I} W_i \implies \bigcap_{i \in I} W_i \neq \emptyset. \quad (14)$$

Siano ora h e k due qualsivoglia scalari e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due qualsiasi elementi dell'intersezione dei sottospazi di $\mathcal{F}$. Poiché $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ appartengono alla intersezione dei W_i , allora necessariamente essi appartengono a ciascuno dei sottospazi W_i . Essendo ciascuno dei sottospazi chiuso per la somma, la combinazione lineare $h\mathbf{v} + k\mathbf{w}$ appartiene a ciascun sottospazio W_i . Ne segue che tale combinazione lineare appartiene a $\bigcap W_i$, che, pertanto, è un sottospazio. $\square$

La proposizione precedente si sintetizza dicendo che l'intersezione di sottospazi di uno spazio vettoriale è un sottospazio.

Diamo ora alcuni esempi di sottospazi di uno spazio vettoriale:

Esempio 0.2.12. Se V è uno spazio vettoriale sul campo K , allora esso è un sottospazio di se stesso; il sottoinsieme $\{\mathbf{0}\}$ di V , costituito dal solo vettore nullo, è un sottospazio di V , che diremo *sottospazio nullo*.

Esempio 0.2.13. Sia $V = \mathbb{R}[x]$, spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ dei polinomi reali in una indeterminata x (cfr. §0.2). Il sottoinsieme $\mathbb{P}_2$ di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di grado non superiore a 2 è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

Esempio 0.2.14. Nell'insieme di tutte le matrici di ordine n a coefficienti reali, il sottoinsieme delle matrici simmetriche è un sottospazio.

Esempio 0.2.15. Nello spazio vettoriale F delle funzioni reali di una variabile reale (cfr. §0.2), il sottoinsieme costituito dalle funzioni $a \sin + b \cos$, al variare di a e b in $\mathbb{R}$ è un sottospazio. Precisamente esso è il sottospazio generato da $\sin$ e $\cos$: $\langle \sin, \cos \rangle$.

Esempio 0.2.16. Tra tutte le successioni reali, consideriamo tutte quelle che soddisfano la relazione seguente $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ come ad esempio la famosa successione di Fibonacci¹ i cui primi termini sono

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Questo è un sottospazio dello spazio di tutte le successioni.

Si dimostra che il sottospazio $\langle J \rangle$ generato da un insieme J non vuoto di vettori è il sottospazio minimo contenente J . Più precisamente:

Proposizione 0.2.17. *Siano V uno spazio vettoriale e J un sottoinsieme non vuoto di V . Allora, il sottospazio $\langle J \rangle$ coincide con l'intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti J .*

Diamo qualche esempio.

Sia $V = \mathbb{R}^3$. Se $J = \mathbb{R}^3$, allora, ovviamente: $\langle J \rangle = \mathbb{R}^3$.

Se è $J = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, ove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, allora $\langle J \rangle$ è ancora uguale ad $\mathbb{R}^3$.

Sia ora J un qualsiasi insieme di vettori contenente $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$; anche in questo caso risulta $\langle J \rangle = \mathbb{R}^3$.

Se invece $J = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, allora $\langle J \rangle = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Se $J = 1, x^2, x^4 \subset \mathbb{R}[x]$ allora $\langle J \rangle$ è il sottospazio di tutti i polinomi pari di grado minore di 5.

¹La successione di Fibonacci (Leonardo Pisano, detto Fibonacci, Pisa (1170?-1250?)), appare in numerosissime situazioni diverse ed è strettamente collegata alla sezione aurea.