

0.1 Il Principio di Induzione

Il principio di induzione è una proprietà tipica dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e si può enunciare come segue. Se X è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con la proprietà che $0 \in X$ e che se $p_n \in X$ implica che $p_{n+1} \in X$ allora $X = \mathbb{N}$. Questo principio viene di solito applicato specificando due passi come andiamo a dimostrare in qualche esempio.

Il primo esempio classico è il seguente. Dimostrare che $1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.

In questo caso il sottoinsieme X di cui parla il principio è il sottoinsieme di tutti i naturali n per i quali la formula è vera.

Il primo passo, detto *base dell'induzione*, consiste nel verificare che $0 \in X$, ossia che per $n = 0$ la formula è vera. Questa è di solito una verifica facile. Nella fattispecie abbiamo $0 = \frac{(0+1)0}{2}$ che è effettivamente vera.

Il secondo passo, detto *passo induttivo*, sta nel verificare che se $k \in X$ (ipotesi induttiva) allora necessariamente $k+1 \in X$. Una volta verificato questo abbiamo che $X = \mathbb{N}$, vale a dire la proposizione in questione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Nell'esempio dobbiamo vedere che se $1 + 2 + \dots + k = \frac{(k+1)k}{2}$ allora $1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{((k+1)+1)(k+1)}{2}$. In effetti, supponiamo che $1 + 2 + \dots + k = \frac{(k+1)k}{2}$ e andiamo a considerare $1 + 2 + \dots + k + (k+1)$ per l'ipotesi induttiva questa somma si può scrivere $\frac{(k+1)k}{2} + (k+1)$. Con semplici passaggi questo diventa

$$\frac{(k+1)k}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)k + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

cioè esattamente l'espressione desiderata. Il principio di induzione ci garantisce quindi che la formula vale per ogni naturale. Q.E.D.

Commento. Il principio di induzione ci ha permesso di dimostrare la formula desiderata. Lo studente però si domanda spesso ma la formula come faccio a trovarla? Questa è una buona domanda per la quale però il principio di induzione non ci può aiutare. Il principio ci aiuta nella dimostrazione se la formula è in qualche modo già data. Per “scoprire” la formula giusta da dimostrare a volte occorre una buona idea. Da dove vengano le buone idee è una questione molto interessante ma che va al di là degli scopi di queste note.

Altro esempio. Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari consecutivi a partire da 1 è uguale a n^2 . In formule: $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$.

Base dell'induzione: Per $n = 1$ abbiamo $1 = 1^2$ che è senz'altro vera.

Passo induttivo: Supponiamo che si abbia $1 + 3 + \dots + 2k - 1 = k^2$ e consideriamo $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)$. Per ipotesi induttiva possiamo scrivere

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

come desiderato. Quindi la formula è vera per ogni intero $n \geq 0$.

Esercizio. Dimostrare che

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

(Suggerimento: Usare la formula appena dimostrata)

Esempio. Dimostrare che se un insieme X ha n elementi, allora X possiede 2^n sottoinsiemi.

Base dell'induzione. Se $X = \{x\}$ ha un solo elemento, allora tutti i possibili sottoinsiemi di X sono $\emptyset$ e X e quindi sono 2 in totale, in accordo con la proposizione. Dunque la proposizione è vera per $n = 1$.

Passo induttivo. Supponiamo che ogni insieme X con k elementi abbia 2^k sottoinsiemi. Prendiamo un insieme Y con $k + 1$ elementi. Fissiamo l'attenzione su un elemento $y \in Y$. I possibili sottoinsiemi di Y sono di due tipi: quelli che contengono y e quelli che non contengono y . I sottoinsiemi che non contengono y sono sottoinsiemi dell'insieme $X = Y - \{y\}$, il quale è un insieme con k elementi. Per ipotesi dunque X ha 2^k sottoinsiemi. Pertanto, abbiamo che i sottoinsiemi di Y che non contengono y sono in numero di 2^k . Domandiamoci ora: quanti sottoinsiemi ci sono che contengono y ? È chiaro che tali insiemi sono della forma $\{y\} \cup A$ al variare di A tra i sottoinsiemi di $X = Y - \{y\}$, e quindi essi sono tanti quanti i precedenti. In totale quindi ci sono $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ sottoinsiemi. Il principio di induzione ci permette di concludere che quindi la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Esempio. Tutti i cavalli sono dello stesso colore.

Base dell'induzione. Se considero un insieme con un solo cavallo è chiaro che questo cavallo ha un solo colore.

Passo induttivo. Supponiamo che ogni insieme di k cavalli sia costituito da cavalli dello stesso colore. Prendiamo ora un insieme di $k + 1$ cavalli. Se tolgo il primo cavallo dal gruppo, i restanti sono un insieme di k cavalli e per ipotesi essi sono tutti dello stesso colore. Se invece tolgo l'ultimo cavallo, ciò che resta è sempre un insieme di k cavalli e quindi, per ipotesi, tutti dello stesso colore. Ma allora il primo cavallo ha lo stesso colore dei cavalli di mezzo e questi hanno lo stesso colore dell'ultimo cavallo. Quindi tutti i cavalli hanno lo stesso colore. Per induzione quindi i cavalli di un insieme comunque grande hanno tutti lo stesso colore. Dov'è l'errore?