0.1 I numeri reali $\mathbb{R}$

Diamo per scontata la conoscenza dei numeri interi e dei numeri razionali con le loro proprietà . Tra le altre cose diamo per conosciute le operazioni di addizione e moltiplicazione di due numeri interi o razionali. In particolare, ricordiamo le seguenti, se a, b, c sono tre qualunque numeri razionali:

1. proprietà commutativa delle operazioni suddette:
$$a + b = b + a \quad ab = ba$$

2. proprietà associativa
$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad a(bc) = (ab)c$$

3. proprietà distributiva
$$a(b + c) = ab + ac$$

Esistono poi due numeri 0 e 1 che hanno delle proprietà particolari e cioè che $a1 = a$ e $a + 0 = a$ qualunque sia a. Infine, per un qualunque numero c esiste l'opposto $-c$ e per qualunque numero c non nullo esiste il reciproco $\frac{1}{c}$ indicato anche come c^{-1}. Dopo aver appreso ad usare i numeri naturali, apprendiamo a scuola ad usare i numeri razionali, o frazioni. Si dice che i numeri razionali sono densi sulla retta nel senso che un qualunque punto della retta può essere approssimato con precisione arbitraria da un numero razionale. Sembrerebbe quindi che non ci sia nessuno spazio né necessità per altri numeri. Fu infatti una scoperta straordinaria dei pitagorici l'esistenza di numeri non razionali detti appunto irrazionali. Ad esempio, non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2. Detto in maniera diversa ma equivalente, l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali.

Qualcuno potrebbe obiettare che questo sia un fatto evidente perché $\sqrt{2}$ ha una espansione decimale illimitata. Ma questo non è altro che un sintomo della irrazionalità di $\sqrt{2}$. Fa appello ad analogie, a consuetudini, ma non è una dimostrazione. Uno si potrebbe chiedere, per esempio, se davvero esista un numero detto $\sqrt{2}$. Il fatto che esista un simbolo per designarlo non implica che esiste l'oggetto, non più che il nome unicorno designi un animale esistente. Riflettendo allora si capisce che la cosa non è affatto evidente. La questione della definizione rigorosa del concetto di numero razionale fu risolta in maniera soddisfacente da R. Dedekind tramite l'introduzione del concetto di *sezione*, per la quale rimandiamo a testi di analisi matematica.

Il ragionamento seguente, che è riportato da Aristotele ma è sicuramente più antico, dimostra, con terminologia moderna, che l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni razionali.

Supponiamo che esista un numero razionale della forma p/q, p, q interi, che possiamo supporre sia ridotta ai minimi termini, e tale che

$$(p/q)^2 = 2$$

Moltiplicando ambo i membri per q^2 abbiamo

$$p^2 = 2q^2$$

Questa uguaglianza ci dice che p^2 è un numero pari. Allora anche p è pari, perché il quadrato di un dispari è dispari (verificare). Abbiamo quindi che $p = 2k$ e sostituendo abbiamo $4k^2 = 2q^2$ e dividendo ambo i membri per 2:

$$2k^2 = q^2$$

Di conseguenza anche q^2 è pari, e quindi anche q è pari. Ora questo è assurdo perché avevamo supposto che p e q fossero privi di fattori comuni.

In generale, chiameremo **campo** ogni insieme in cui siano definite due operazioni che soddisfino le proprietà suddette. Si parla allora del campo dei numeri reali, cosıcome si parla del campo dei numeri razionali. Tuttavia l'insieme $\mathbb{Z}$, dove pure sono definite due operazioni con molte delle proprietà desiderate non è un campo in quanto una proprietà, quella che richiede l'esistenza del reciproco non è verificata. Infatti, ad esempio l'intero 2 ha sì un reciproco ma questo non è intero. Quindi $\mathbb{Z}$ non è un campo.

Tutti i numeri reali diversi da zero si possono dividere in due sottoinsiemi disgiunti: il sottoinsieme dei numeri positivi e il sottoinsieme dei numeri negativi. Se a è positivo $-a$ è negativo e viceversa. Si definisce valore assoluto di un numero a come segue

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \text{ è positivo} \\ -a \text{ se } a \text{ è negativo} \end{cases}$$

Il valore assoluto di 0 è 0.

Confrontare due numeri è a volte importante. Diciamo che $a < b$ se $b - a$ è positivo. È importante saper trattare le disuguaglianze e saper usare opportunamente le seguenti proprietà :

1. Se $a < b$ e $b < c$ allora $a < c$;
2. se $a < b$ e $c < d$ allora $a + c < b + d$;
3. se $a < b$ e p è positivo allora $pa < pb$;
4. se a e b sono positivi e $a < b$, allora $1/a > 1/b$.

Esercizi.

1. Dimostrare che se $a < b$ allora $-a > -b$.
2. Dimostrare che il quadrato di un qualunque numero non può essere negativo.
3. Dimostrare che per ogni coppia di numeri a e b si ha
$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2.$$
4. Dimostrare che per ogni coppia di numeri a e b si ha
$$2ab \leq a^2 + b^2$$

La seguente disuguaglianza triangolare è particolarmente importante

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Questa si può dimostrare come segue:

$$\begin{aligned} &|x+y|^2 = (x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2 \\ &= |x|^2+2xy+|y|^2 \leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = (|x|+|b|)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

da cui la conclusione prendendo le radici quadrate.

Esercizio. Dimostrare che $|a+c| \geq ||a|-|c||$. Dalla disuguaglianza triangolare, ponendo $a+b=-c$ e dunque $b=-c-a$ si ha

$$\begin{aligned} &|-c| \leq |a|+|-c-a| \\ &|c| \leq |a|+|c+a| \\ &|c|-|a| \leq |c+a| \end{aligned} \tag{2}$$

Scambiando i ruoli di a e c otteniamo anche $|a|-|c| \leq |c+a|$. Dunque $|a+c|$ è maggiore sia di una differenza che dell'opposto di questa differenza. Ne segue che

$$|a+c| \geq ||a|-|c||$$

come richiesto.

Esercizio. Dimostrare che se $a \geq -1$ allora vale la seguente disuguaglianza di Bernoulli

$$(1+a)^n \geq 1+na, n=1,2,3,\ldots$$

Procediamo per induzione. La relazione è vera per $n=1$: $1+a \geq 1+a$. Supposta vera per un certo k dimostriamola per il successivo.

$$\begin{aligned} &(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) = \\ &= 1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a \end{aligned} \tag{3}$$

Un insieme X di numeri reali si dice limitato superiormente, se esiste $M \in \mathbb{R}$ con la proprietà che $x \leq M \ \forall x \in X$, M si dice un maggiorante di X. Si dice invece limitato inferiormente, se esiste $m \in \mathbb{R}$ con la proprietà che $x \geq m \ \forall x \in X$, m si dice un minorante di X. L'insieme X si dice limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente. Il massimo dei minoranti si dice estremo inferiore di X: $infX$, e il minimo dei maggioranti si dice estremo superiore di X: $supX$.

L'insieme dei numeri reali è caratterizzato dall'essere un campo rispetto alle operazioni di somma e prodotto e di essere inoltre totalmente ordinato e **completo**, nel senso che *ogni sottoinsieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente ammette un estremo superiore*. Questa proprietà sarà approfondita nel corso di Analisi.

Esempio. L'insieme $X = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme limitato e possiede $infX = 0$, $supX = 1$.

L'insieme $\{\frac{3n^2}{4n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato.

L'insieme $\mathbb{Q}$ possiede le stesse proprietà algebriche di $\mathbb{R}$, cioè essi sono entrambi dei campi. Tuttavia $\mathbb{Q}$ non è completo. Per esempio, l'insieme

$$\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$$

è limitato superiormente ma non ammette estremo superiore (in $\mathbb{Q}$).

Infine, accenniamo solo al fatto che esistono anche campi con un numero finito di elementi, i cosiddetti campi di Galois.