0.1 Numeri complessi $\mathbb{C}$

Abbiamo visto sopra come l'introduzione dei numeri irrazionali può essere motivata dalla necessità di trovare soluzione all'equazione $x^2 - 2 = 0$ che non ha soluzioni razionali. Ciò è analogo per esempio all'introduzione dei numeri negativi per risolvere equazioni come $x + 1 = 0$ oppure razionali per risolvere $3x - 4 = 0$. In maniera più sostanziale, i numeri complessi possono essere introdotti con la necessità di risolvere l'equazione $x^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali. Storicamente, la necessità di introdurre numeri di questo tipo non si presentò con la soluzione di equazioni di secondo grado, bensıcon la soluzione di alcune equazioni di terzo grado. Nel Rinascimento G. Cardano in *Ars Magna* considerò l'equazione $x^3 = 15x + 4$ alla quale applicò la formula risolutiva dimostrata poco prima da Tartaglia. L'applicazione di tale formula conduce al calcolo di una soluzione mediante l'espressione:

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$$

Questa espressione contiene delle radici quadrate di numeri negativi, e al tempo non si sapeva bene come interpretarle. Tuttavia non si può negare che l'equazione in questione è risolta da 4:

$$4^3 = 15(4) + 4$$

Volenti o nolenti gli studiosi dll'epoca furono costretti ad introdurre i numeri immaginari e i numeri complessi, che furono per lungo periodo guardati con sospetto. Oggigiorno tali numeri sono indispensabili nella matematica, nella fisica e nell'ingegneria, ma il loro nome rimane ad indicare questo inizio di diffidenza.

Definiamo l'insieme dei numeri complessi come tutte le espressioni della forma $a + ib$ dove a e b sono numeri reali e dove i è l'unità immaginaria cioè un numero tale che $i^2 = -1$. In altre parole, i è una soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $z' = a' + ib'$ si dicono uguali se $a = a'$ e $b = b'$. Le operazioni di somma e prodotto si eseguono come se queste espressioni fossero polinomi ricordando però la regola che $i^2 = -1$. Si ha quindi

$$(a + ib) + (a - ib) =)a + a') + i(b + b')$$

Inoltre

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Il numero reale a si dice parte reale del numero complesso z, in simboli $Re(z) = a$ mentre b si dice parte immaginaria, in simboli $b = Im(z)$. Attenzione che la parte immaginaria di un numero complesso è reale! Si può dimostrare che con queste due operazioni l'insieme $\mathbb{C}$ è un campo. Questo in particolare significa che ogni numero non nullo ha un inverso. Calcoliamo, per esempio, l'inverso di $2 + 3i$. L'inverso dovrà avere, per definizione, una forma $a + ib$. Procediamo come segue

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13}$$

In altre parole $Re(\frac{1}{2+3i}) = \frac{2}{13}$ e $Im(\frac{1}{2+3i}) = -\frac{3}{13}$. Eseguiamo la verifica.

$$(2+3i)(\frac{2}{13} - i\frac{3}{13}) = \frac{4}{13} - i\frac{6}{13} + i\frac{6}{13} - i^2\frac{9}{13} = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1$$

Abbiamo moltiplicato il numeratore e il denominatore per il coniugato del numero al denominatore, secondo la seguente definizione:

Definizione 0.1.1. *Il coniugato del numero $z = a + ib$ è il numero $\bar{z} = a - ib$.*

Si definisce inoltre

Definizione 0.1.2. *Il modulo del numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*

Si possono rappresentare i numeri complessi su un piano cartesiano in modo che il numero $z = a+ib$ sia rappresentato dalla coppia (a, b). In tal modo $|z|$ è precisamente la distanza di z dall'origine. In tale rappresentazione l'asse delle ascisse si dice *asse reale* perche i punti di quest'asse avendo coordinate $(a, 0)$ sono identificati con i numeri reali (numeri complessi di parte immaginaria nulla); mentre l'asse delle ordinate viene detto *asse immaginario* e i suoi punti avendo coordinate $(0, b)$ si dicono puramente immaginari. Ad esempio, l'unità immaginaria i corrisponde al punto $(0, 1)$. Abbiamo un'elenco di importanti proprietà dei coniugati e dei moduli.

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4. $\overline{(\bar{z})} = z$
5. z è reale se e solo se $\bar{z} = z$
6. $z\bar{z} = |z|^2$
7. $\frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
8. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
9. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
10. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

0.2 Forma polare o trigonometrica dei numeri complessi

Nel numero precedente abbiamo rappresentato un numero complesso z mediante le sue coordinate ortogonali (a, b). È possibile individuare lo stesso numero mediante le cosiddette coordinate polari e questo comporta vari vantaggi in alcune situazioni. Il punto di coordinate (a, b) può essere individuato anche dando la sua distanza r dall'origine e, se il numero è non nullo, dando l'angolo che la retta passante per l'origine e per il punto (a, b) forma con l'asse delle x. Tale angolo θ si dice argomento di z ed è determinato solo a meno di multipli di 2π. L'unico valore di quest'angolo che soddisfa $-\pi < \theta \leq \pi$ si dice *argomento principale* di z. Dalla trigonometria segue facilmente che

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{aligned} \tag{1}$$

Di conseguenza il numero z può essere espresso come $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Esempio 0.2.1. *Calcolare la forma trigonometrica del numero* $z = -2 + 2i$. *Si ha:* $r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ *e si può verificare, magari disegnando una figura, che l'argomento principale di* z *è* $\frac{3\pi}{4}$ *da cui* $z = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$ *(attenzione: se si calcolano i valori del seno e del coseno in questa espressione si torna alla forma* $-2 + 2i$.

Verificare che la forma trigonometrica di $-i$ è $\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})$ Risulta molto utile introdurre la seguente notazione esponenziale

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

dove e è la famosa costante $e = 2.71828....$ Questa eguaglianza sarà dimostrata in corsi di analisi di variabile complessa. Noi la prendiamo semplicemente come definizione del primo membro. Questa definizione si rivela molto utile soprattutto nel calcolo dei prodotti e potenze di numeri complessi. Con questa notazione si possono riscrivere i numeri precedenti come segue

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}} \quad \text{e} \quad -i = e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

Questi esponenziali soddisfano la legge degli esponenti come ci si aspetta, cioè

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\phi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) \\ &= \cos(\theta + \phi) + i(\sin(\theta + \phi) \\ &= e^{i(\theta+\phi)} \end{aligned} \tag{2}$$

Per moltiplicare due numeri complessi in forma polare basta allora moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti. Cioè se $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

Esempio 0.2.2. *Supponiamo di voler calcolare* $(-2 + 2i)^2$. *Da un lato possiamo calcolare* $(-2 + 2i)^2 = 4 + (2i)^2 - 8i = 4 - 4 - 8i = -8i$. *Oppure possiamo calcolare* $(2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}})^2 = 8e^{\frac{3\pi i}{2}}$ *che è la stessa cosa.*

Nell'esempio precedente l'uso della forma polare non è molto più semplice del calcolo algebrico con il quadrato del binomio. Se però avessimo voluto calcolare, ad esempio $(-2+2i)^{100}$ allora il secondo modo di procedere è nettamente più vantaggioso. In alcuni casi il vantaggio è ancora più evidente. Come vediamo nell'esempio che segue.

Esempio 0.2.3. *Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = 1$. Per ovvi motivi queste soluzioni si dicono radici cubiche dell'unità. Procediamo come segue. Scriviamo $1 = 1e^{i\cdot 0}$ in forma polare e cerchiamo di determinare un numero $z = re^{i\theta}$ con la condizione che $z^3 = 1$. Sappiamo che dovrà quindi essere $r^3 e^{3\theta} i = 1e^{i\cdot 0}$. Se questi numeri sono uguali allora i loro moduli sono uguali, e inoltre gli argomenti differiscono per un multiplo intero di 2π. Abbiamo quindi*

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Siccome il modulo r è un numero reale e positivo deve essere necessariamente $r = 1$. Dalla seconda equazione ricaviamo invece $\theta = \frac{2k\pi}{3}$. Al variare di k tra gli interi non si ottengono infinite soluzioni come sembrerebbe a prima vista, ma se ne ottengono solo tre, per i valori $k = 0, 1, 2$ perchè gli altri valori sono uguali a questi. Abbiamo quindi le tre soluzioni, tre radici cubiche dell'unità, e cioè:

$$\begin{aligned} 1e^{0i} &= 1 \\ 1e^{\frac{2\pi i}{3}} &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1e^{\frac{4\pi i}{3}} &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Abbiamo accennato sopra che l'introduzione di nuovi numeri, a partire dai naturali, fino ai complessi, si può giustificare con la necessità e il desiderio di trovare la soluzione di alcune equazioni algebriche. Uno potrebbe pensare che questo processo potrebbe durare all'infinito, con sempre nuove equazioni algebriche da risolvere. Ma così non è. Il cosiddetto Teorema Fondamentale dell'Algebra, la cui dimostrazione fu data da Gauss nella sua tesi di laurea, garantisce che ciò non succede. Precisamente abbiamo:

Teorema 0.2.4 (Teorema Fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio di grado maggiore o uguale a 1 con coefficienti complessi ammette una radice complessa.*

La dimostrazione è omessa.

Come conseguenza ogni polinomio $f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$, con coefficienti complessi $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, di grado $n \geq 1$ possiede n radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e si fattorizza nel prodotto di n fattori lineari:

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n).$$

Esercizi.

1. Calcolare le radici quarte di $(1 + i)$.
2. Determinare tutte le radici dell'equazione $x^2 - ix + (1 + 3i) = 0$.
3. Calcolare le radici di $x^2 - 2x\cos t + 1 = 0$ con t un arbitrario valore fissato.
4. Determinare un polinomio a coefficienti reali di grado 4 che abbia come radici $2 - i$ e $3 - 2i$.

5. Disegnare nel piano complesso le soluzioni dell'equazione $|z| = 1$.

6. Disegnare nel piano complesso le soluzioni dell'equazione $z = i\bar{z}$.

7. Usare la forma polare dei numeri complessi per verificare che $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ e $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

8. Dimostrare che per ogni valore intero n il numero $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ è reale.

9. Dimostrare che la somma di tutte le n radici n-esime dell'unità è zero per $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Soluzioni.

1. Per prima cosa scriviamo la forma polare di $1 + i$. Il modulo è $r = \sqrt{2}$ e il suo argomento è $\frac{\pi}{4}$. (Può essere senz'altro utile fare un disegno). Le radici quarte desiderate hanno quindi modulo $\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$ e argomento $\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$. Le quattro radici distinte si ottengono, ad esempio, per i valori di $k = 0, 1, 2, 3$.

2. Usiamo la formula risolutiva che ci dà

$$\frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4(1 + 3i)}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-5 - 12i}}{2}$$

Cerchiamo di determinare un numero complesso $z = a + ib$ il cui quadrato sia $-5 - 12i$. Abbiamo $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ dove a, b sono reali. Confrontando abbiamo dunque il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \end{cases}$$

Ricaviamo b dalla seconda equazione e la sostituiamo nella prima ottenendo

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$$

che, con semplici passaggi, è equivalente a $a^4 + 5a^2 - 36 = 0$. Questa è una equazione quadratica in a^2 e si fattorizza in $(a^2 - 4)(a^2 + 9) = 0$. Essendo a un numero reale, le uniche soluzioni sono $a = 2, a = -2$ e quindi, rispettivamente, $b = -3, b = 3$. Abbiamo pertanto determinato $z = \pm(2 - 3i)$. Le soluzioni cercate sono quindi

$$x_1 = \frac{1}{2}(i + 2 - 3i), \qquad x_2 = \frac{1}{2}(i - 2 + 3i)$$

ossia $x_1 = 1 - i, x_2 = -1 + 2i$.

3. Usiamo la formula ridotta per la soluzione delle equazioni di secondo grado e otteniamo subito

$$x = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1} = \cos t \pm i\sqrt{1 - \cos^2 t} = \cos t \pm i \sin t$$

4. Sappiamo che un polinomio a coefficienti reali che abbia una radice complessa z deve avere come radice anche la coniugata $\bar{z}$. Sappiamo inoltre che un polinomio con n radici $x_i, i = 1, \ldots, n$, si fattorizza nel prodotto di $(x - x_i), i = 1, \ldots n$. Per risolvere il nostro problema basterà dunque considerare il polinomio prodotto

   $$(x-(2-i))(x-(2+i))(x-(3-2i))(x-(3+2i)) = (x^2-4x+5)(x^2-6x+13)$$

   cioè

   $$x^4 - 10x^3 + 42x^2 - 82x + 65.$$

5. I numeri complessi di modulo 1 sono i numeri rappresentati da punti che distano uno dall'origine. Il disegno desiderato quindi è quello della circonferenza di centro l'origine e di raggio 1.

6. Dobbiamo trovare tutti i numeri complessi $z = a + ib$ con la proprietà che $a + ib = i(a - ib)$. Troviamo $a + ib = ia + b$ e quindi confrontando $a = b$. Il disegno dell'insieme in questione è quindi quello della bisettrice del primo e terzo quadrante.

7. Basta considerare il numero complesso $e^{i\alpha}$ il cui quadrato è $e^{i2\alpha}$. In altre parole abbiamo la relazione

   $$\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = (\cos\alpha + i \sin\alpha)^2$$

   Sviluppando il quadrato abbiamo

   $$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i \sin\alpha \cos\alpha$$

   e confrontando con il primo membro si ottengono le relazioni desiderate.

8. Si potrebbe pensare di usare un procedimento per induzione, ma in questo caso la cosa non è agevole. Molto meglio pensare di verificare che il numero in questione è reale sfruttando la proprietà che un numero complesso z è reale se e solo se $z = \bar{z}$. Calcoliamo dunque il coniugato di $(1+i)^n + (1-i)^n$:

   $$\begin{aligned} \overline{(1+i)^n + (1-i)^n} &= \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} \\ &= \overline{(1+i)}^n + \overline{(1-i)}^n = (1-i)^n + (1+i)^n \end{aligned}$$

   Quindi il numero è reale.

9. Le radici n-esime dell'unità sono tutte e sole le radici del polinomio $x^n - 1$. Dividendo per il binomio $x - 1$, dato che 1 è senz'altro radice, si ottiene la relazione

   $$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

   Da questa fattorizzazione segue che le radici n-esime dell'unità annullano il secondo fattore. Posto $x_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$, si verifica anche facilmente che, al variare di k intero, x_1^k varia tra tutte le radici n-esime di 1. Una radice con questa proprietà si dice *radice primitiva*. Sostituendo allora x_1 in $(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ abbiamo la conclusione desiderata.