0.1 Esercizio sui sottospazi

Sia U il sottoinsieme dello spazio vettoriale $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ costituito dalle matrici antisimmetriche:

$$U = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) | A^T = -A\}$$

Verificare che U è un sottospazio. Determinarne una base e quindi la dimensione.

Svolgimento. Per definizione di sottospazio occorre verificare la chiusura di U rispetto alle operazioni definite nello spazio vettoriale $M(3 \times 3, \mathbb{R})$, vale a dire:

1. Se $A, B \in U$ verificare che $A + B \in U$
2. Se $A \in U, a \in \mathbb{R}$ verificare che $aA \in U$.

Per il primo punto: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$ e quindi $A + B \in U$.

Per il secondo: $(aA)^T = a(A^T) = a(-A) = -aA$ e dunque $aA \in U$. Questo completa la verifica che U è un sottospazio.

Per determinare una base: occorre esibire un sottoinsieme libero di generatori di U. Affermo che l'insieme

$$\mathcal{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\},$$

dove E_{ij} indica la matrice di ordine 3 che ha 1 nel posto (i, j) e zero altrove, è un sottoinsieme con i requisiti richiesti. L'insieme $\mathcal{B}$ genera U. Infatti una qualunque matrice in U è della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a(E_{12} - E_{21}) + b(E_{13} - E_{31}) + c(E_{23} - E_{32})$$

Infine $\mathcal{B}$ è un insieme libero: se

$$a(E_{12} - E_{21}) + b(E_{13} - E_{31}) + c(E_{23} - E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

allora necessariamente $a = 0, b = 0, c = 0$ il che significa, per definizione, che questi vettori sono linearmente indipendenti.

Avendo dunque determinato una base costituita da tre vettori possiamo affermare che $dimU = 3$. Questo conclude l'esercizio.

Osservazioni varie. La discussione fatta in aula sui gradi di libertà era stata fatta solo per motivare la scelta dell'insieme $\mathcal{B}$ che altrimenti pare calato dal cielo. Si trattava di una discussione puramente intuitiva per poter ottenere un insieme che avesse i requisiti desiderati. Non può in alcun modo sostituire la verifica che i vettori di $\mathcal{B}$ sono generatori linearmente indipendenti. Si raccomanda inoltre la massima attenzione alle definizioni e alla proprietà del linguaggio.