

0.1 Esercizio sui sistemi omogenei

Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo. Verificare che esso è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Trovarne una base.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 11x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 18x_4 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

Per prima cosa prendiamo la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 11 & -2 & 9 & 18 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo di Gauss ci permette di ottenere la seguente forma a gradini ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = 0 \end{cases}$$

Le variabili sono x_1, x_2 sono le variabili dominanti, i parametri sono $x_3 = t, x_4 = s$. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

da cui le soluzioni sono $\{(-\frac{2}{3}t - \frac{5}{3}s, \frac{5}{6}t - \frac{1}{6}s, t, s), t, s \in \mathbb{R}\}$. Le soluzioni sono infinite e dipendenti da due parametri; si dice allora che esse sono ∞^2 . Per ottenere una base prendiamo i due vettori corrispondenti alla scelte, rispettivamente, $t = 1, s = 0$, e poi $t = 0, s = 1$:

$$\mathbf{u} = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, 0), \mathbf{v} = (-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, 0, 1)$$

Intanto è chiaro che questi due vettori generano il sottospazio:

$$(-\frac{2}{3}t - \frac{5}{3}s, \frac{5}{6}t - \frac{1}{6}s, t, s) = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

Inoltre se $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (0, 0, 0, 0)$ abbiamo, confrontando in particolare le ultime due coordinate che $a = 0, b = 0$, ossia i due vettori sono linearmente indipendenti. Questo conclude la verifica.