Studiamo la conica di equazione $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 3y + 1 = 0$.

La conica ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3/2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = -25/4 \neq 0$, la conica è generale.

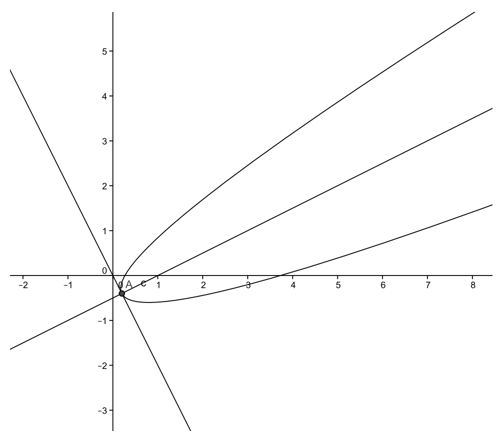
Dato che $\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, la conica è una parabola.

L'equazione può essere riscritta come $(x - 2y)^2 - 4x + 3y + 1 = 0$. Essendo $u = 1$, $v = -2$, l'asse ha equazione $1(2x - 4y - 4) - 2(-4x + 8y + 3) = 0$, cioè $10x - 20y - 10 = 0$ che equivale a $x - 2y - 1 = 0$.

Il sistema $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 3y + 1 = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ si riduce a $\begin{cases} -5y - 2 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$ che ha come unica soluzione il punto $V(1/5, -2/5)$ vertice della parabola.

Riduciamola ad equazione canonica.

Prendiamo il vertice è $V(1/5, -2/5)$ come nuova origine. Uno dei nuovi assi sarà l'asse r di simmetria che ha equazione $x - 2y - 1 = 0$. L'altro asse sarà la retta n per V perpendicolare a r che ha equazione $2(x - 1/5) + y + 2/5 = 0$ ovvero $2x + y = 0$.



Figura

Assumendo di scegliere n come asse x' (di equazione $y' = 0$) e r come asse y' (di equazione $x' = 0$), abbiamo perciò:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

e conseguentemente:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5} \\ \\ y = \frac{-2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' - \frac{2}{5} \end{cases}.$$

Sostituendo queste ultime nell'equazione della conica, si ottiene $\sqrt{5}x'^2 - y' = 0$ ovvero $y' = \sqrt{5}x'^2$, una parabola con la concavità verso l'alto.

Il fuoco F, di coordinate $x' = 0$, $y' = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ in RC$(Vx'y')$, ha quindi coordinate in RC(Oxy): $x = 0 + \frac{2}{20} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$, $y = 0 + \frac{1}{20} - \frac{2}{5} = -\frac{7}{20}$.

La direttrice, che in RC$(Vx'y')$ ha equazione $y' = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$, ha in RC$(Oxy)$ equazione $\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$ ovvero $8x + 4y + 1 = 0$.

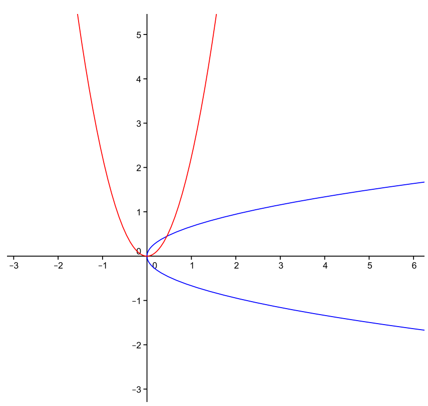
N.B. Per trovare il cambiamento di riferimento necessario si poteva anche procedere considerando i versori $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$ e $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$, prendendo la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e scrivere quindi il cambiamento $(x,y)^T = M(x',y')^T$ ossia

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5} \\ \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{-2}{\sqrt{5}}y' - \frac{2}{5} \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene $-x' + \sqrt{5}y'^2 = 0$, una parabola con la concavità verso destra.



Figura