0.1 Esercizio

Nel caso di un'applicazione lineare determinata da una matrice il nucleo e l'immagine dell'applicazione coincidono con alcuni concetti già studiati in precedenza, come vediamo nei seguenti esempi.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e consideriamo la applicazione lineare associata $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$$

Domandiamoci quale è il nucleo di T_A e l'immagine di T_A.

Per definizione, $\ker T_A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

In altre parole il nucleo di T_A coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che ha A come matrice dei coefficienti.

Per quanto riguarda l'immagine di T_A ragioniamo così .

Per definizione, Im $T_A = \{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Quindi l'immagine di T_A è l'insieme di vettori B di $\mathbb{R}^2$ per cui il sistema $AX = B$, cioè

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b_1 \\ 4x + 5y + 6z = b_2 \end{cases}$$

ammette soluzione. Scrivendo la matrice A a blocchi per colonne: $A = (C_1, C_2, C_3)$ il sistema si può scrivere come $xC_1 + yC_2 + zC_3 = B$. In altre parole, $B \in$ Im T_A se e solo se $B \in \mathcal{C}(A)$, ossia l'immagine di T_A coincide con lo spazio delle colonne di A.

Riassumendo abbiamo visto che

per una applicazione lineare T_A indotta da una matrice A il nucleo coincide con l'insieme delle soluzioni del SLO di matrice A, che a volte è chiamato $null(A)$, mentre *l'immagine di T_A coincide con lo spazio delle colonne di A* ossia $\mathcal{C}(A)$.

In particolare ciò significa che il rango della matrice A è uguale alla dimensione di Im T_A.

Esercizio. Calcolare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ indotta dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 18 \\ -2 & 1 & 1 & 6 \\ -7 & 3 & 4 & 19 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il nucleo coincide con $null(A)$ cioè l'insieme delle soluzioni del SLO di matrice A. Per determinare queste soluzioni usiamo la riduzione di Gauss. Si può calcolare che la forma a scala ridotta di A è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ne segue, per il Teorema di Rouché-Capelli, che il sistema possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove n è il numero delle incognite e r è il rango della matrice. Nel caso in questione: $4-3=1$ e quindi ci sono infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Esse sono $\begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ t \\ t \end{pmatrix}$. In conclusione, il nucleo cercato è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$, di dimensione 1, costituito da questi vettori, di cui una base è $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, e cioè una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^4$.

Per l'immagine: basta prendere lo spazio generato dalle colonne di A. Dalla forma a scala calcolata precedentemente e dalla teoria svolta in precedenza sappiamo che lo spazio delle colonne ha dimensione 3 ed una base è data dalle colonne di A corrispondenti ai pivot, in questo caso quindi una base è data dalle prime tre colonne di A. Si tratta quindi di un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$ e deve quindi necessariamente coincidere con tutto $\mathbb{R}^3$. La nostra applicazione è quindi suriettiva (epimorfismo). Non è invece iniettiva in quanto abbiamo già determinato un nucleo non banale (leggi: non nullo).