1 Cambiamenti di riferimento nel piano

Siano date due basi ortonormali ordinate di V_2 : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ e $\mathcal{B}' = (\vec{i'}, \vec{j'})$ e supponiamo che

$$\begin{cases} \vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{j'} = c\vec{i} + d\vec{j} \end{cases}$$

allora per un generico vettore $\vec{v} \in V_2$ abbiamo

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_{x'}\vec{i'} + v_{y'}\vec{j'}$$

e sostituendo

$$= v_{x'}(a\vec{i} + b\vec{j}) + v_{y'}(c\vec{i} + d\vec{j}) = (av_{x'} + cv_{y'})\vec{i} + (bv_{x'} + dv_{y'})\vec{j}$$

Confrontando abbiamo

$$\begin{cases} v_x = av_{x'} + cv_{y'} \\ v_y = bv_{x'} + dv_{y'} \end{cases}$$

che possiamo scrivere anche in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ si dice matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, essa ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ nella base $\mathcal{B}$. Dalla formula (1) si vede subito che il cambiamento inverso ha per matrice la matrice inversa di M.

Esempio 1.1. Supponiamo che $\vec{i'} = \frac{1}{5}(3\vec{i} + 4\vec{j})$ e $\vec{j'} = \frac{1}{5}(-4\vec{i} + 3\vec{j})$. Allora la matrice M è

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi il cambio di coordinate di vettore è

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ossia

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{5}(3v_{x'} - 4v_{y'}) \\ v_y = \frac{1}{5}(4v_{x'} + 3v_{y'}) \end{cases}$$

Osserviamo la notevolissima proprietà che la matrice M possiede e cioè $MM^T = I$ ossia $M^{-1} = M^T$ una tale matrice si dice *matrice ortogonale*. Si tratta di un fatto generale: la matrice M ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$ ed ha la forma

$$M = \begin{pmatrix} \vec{i'} \cdot \vec{i} & \vec{j'} \cdot \vec{i} \\ \vec{i'} \cdot \vec{j} & \vec{j'} \cdot \vec{j} \end{pmatrix}$$

Osserviamo allora che M^T è proprio la matrice del cambiamento inverso e quindi coincide con M^{-1} (v. formula (1)).

Esempio 1.2. Proponiamoci ora di calcolare le coordinate del vettore $\vec{v} = 8\vec{i} + 8\vec{j}$ nella base $\mathcal{B}'$ (vedi figura 1). Applichiamo le formule inverse delle (2) :

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{1}{5}(3v_x + 4v_y) \\ v_{y'} = \frac{1}{5}(-4v_x + 3v_y) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{1}{5}(3 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = \frac{56}{5} \\ v_{y'} = \frac{1}{5}(-4 \cdot 8 + 3 \cdot 8) = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

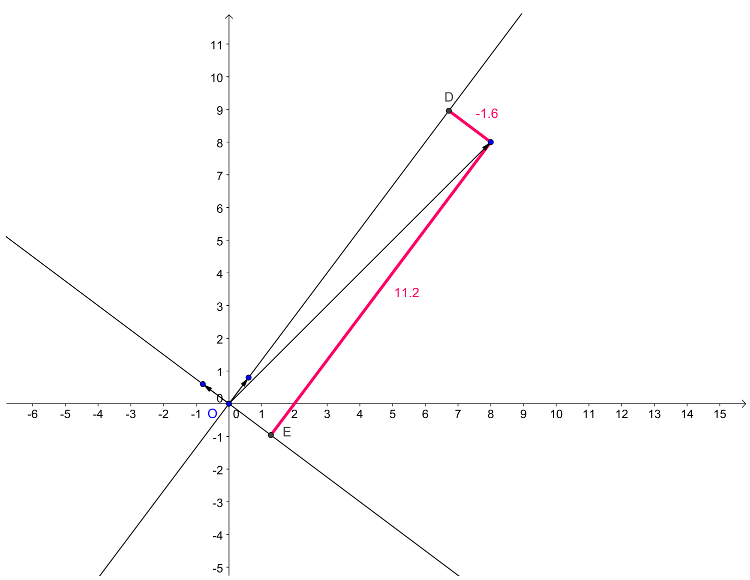

Figura 1

Supponiamo ora che anche l'origine del sistema di riferimento venga spostata in $O'(x_0, y_0)$. Allora per calcolare le coordinate del punto $P(x, y)$ nel nuovo riferimento $RC(O'x'y')$, occorrerà determinare le coordinate del vettore $\overrightarrow{O'P}$. Abbiamo allora la relazione vettoriale

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

ossia

$$\overrightarrow{O'P} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP}$$

Nell'esempio precedente questa relazione si traduce in

$$\overrightarrow{O'P} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x - x_0 \\ v_y - y_0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x' = a(v_x - x_0) + b(v_y - y_0) \\ y' = c(v_x - x_0) + d(v_y - y_0) \end{cases}$$

Esempio 1.3. Calcolare le coordinate del punto $P(8, 8)$ nel sistema di riferimento $RC'(O'\vec{i'}\vec{j'})$ dove l'origine è $O'(-2, 4)$ e la base $\mathcal{B}'$ è quella dell'esempio precedente. Abbiamo allora

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}(v_x + 2) + \frac{4}{5}(v_y - 4) = \frac{46}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}(v_x + 2) + \frac{3}{5}(v_y - 4) = -\frac{28}{5} \end{cases}$$

Vedi figura 2.

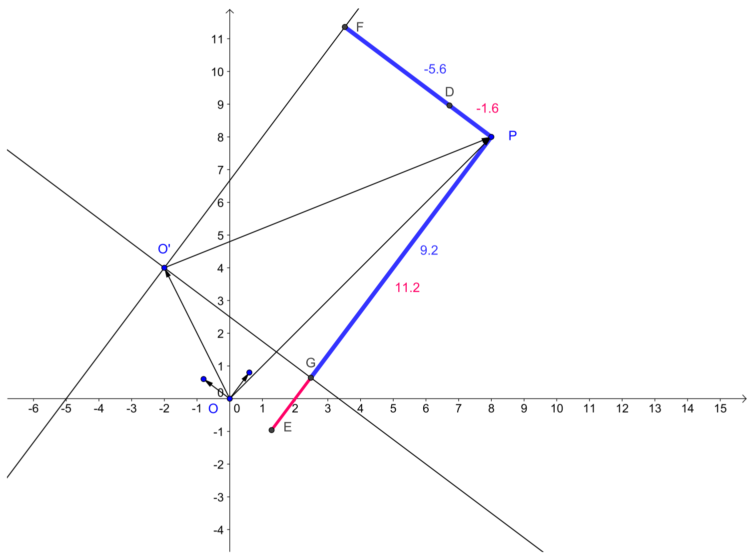

Figura 2

Esempio 1.4. Calcolare le coordinate del punto $P(8,8)$ nel sistema di riferimento $RC'(O'\vec{i'},\vec{j'})$ dove $O'(15,-10)$ e la base $\mathcal{B}'$ è quella dell'esempio precedente. Abbiamo allora

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}(8-15) + \frac{4}{5}(8+10) = \frac{51}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}(8-15) + \frac{3}{5}(8+10) = \frac{82}{5} \end{cases}$$

In alternativa si poteva procedere così : Sappiamo che le nuove coordinate devono essere del tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + k_1 \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + k_2 \end{cases} \tag{3}$$

dove abbiamo apportato una traslazione da determinarsi alla rotazione degli assi. La traslazione può essere determinata sapendo che l'origine O' ha coordinate ovviamente

$(0,0)$ nel riferimento RC' mentre ha coordinate $(15,-10)$ nel riferimento RC come assegnato. Si ha quindi

$$\begin{cases} 0 = \frac{3}{5}\cdot 15 + \frac{4}{5}\cdot(-10) + k_1 \\ 0 = -\frac{4}{5}\cdot 15 + \frac{3}{5}\cdot(-10) + k_2 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} 0 = 9 - 8 + k_1 \\ 0 = -12 - 6 + k_2 \end{cases}$$

da cui $k_1 = -1, k_2 = 18$. Usando ora le (3) con questa scelta di k_1, k_2 abbiamo

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}(8) + \frac{4}{5}(8) - 1 = \frac{51}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}(8) + \frac{3}{5}(8) + 18 = \frac{82}{5} \end{cases}$$

come sopra. In effetti

$$\begin{cases} k_1 = \frac{3}{5}(-15) + \frac{4}{5}(10) = -9 + 8 = -1 \\ k_2 = -\frac{4}{5}(-15) + \frac{3}{5}(10) = 12 + 6 = 18 \end{cases}$$

($(-1,18)$ sono le coordinate di O' nel sistema ottenuto semplicemente ruotando il sistema RC di partenza.)

Esempio 1.5. Si verifichi che le rette $r : -2x + y = 0$ e $s : 2y + x - 1 = 0$ sono ortogonali e si consideri il riferimento $RC(O'\vec{i'}, \vec{j'})$ che ha come assi x', y' le rette r e s orientate, rispettivamente, secondo le x crescenti e secondo le x decrescenti. (V. figura 3).

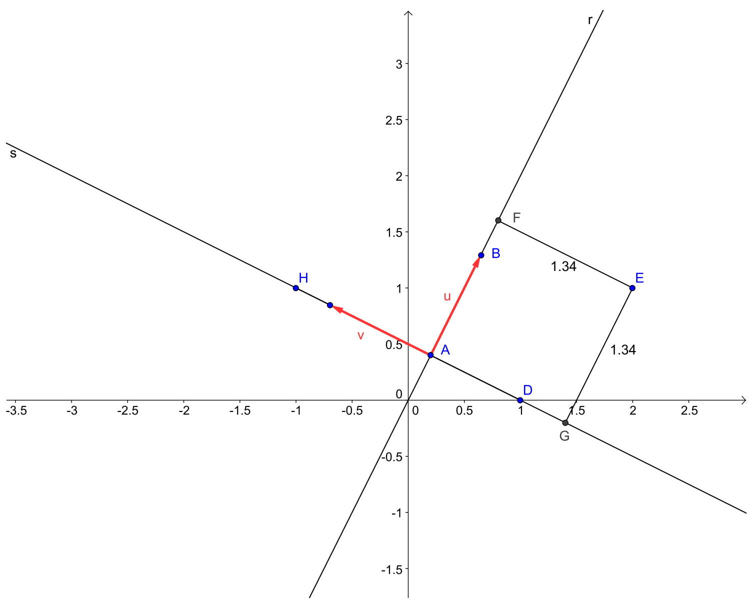

Figura 3 Il punto O' è il punto di intersezione delle due rette e quindi si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

ottenendo $O'(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. Il versore di r orientato nel verso delle x crescenti è $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (si distingue dall'altra possibile scelta perché ha la componente x positiva). Il versore di s orientata secondo le x decrescenti ha invece la componente x negativa e sarà quindi $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi $\vec{i'} = \vec{r}$ e $\vec{j'} = \vec{s}$. La matrice del cambiamento di coordinate è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

Il cambiamento di coordinate di punto è allora

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + k_1 \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + k_2 \end{cases}$$

Ricaviamo allora

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{5} + k_1 \\ 0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{5} + k_2 \end{cases}$$

da cui $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $k_2 = 0$. Le formule desiderate sono quindi

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

Per esempio si verifica ora che i punti $D(1,0)$, $E(2,1)$ e $H(-1,1)$ del riferimento RC hanno, nel riferimento RC', coordinate, rispettivamente, $D(0,-\frac{2}{\sqrt{5}})$, $E(\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}})$, $H(0,\frac{3}{\sqrt{5}})$.

Esempio 1.6. Prendiamo una retta $r : 2x + 5y + 8 = 0$ ed una sua perpendicolare $s : -5x + 2y + 5 = 0$. Si può verificare che queste due rette si intersecano nel punto $O'(\frac{9}{29}, -\frac{50}{29})$. Supponiamo di prendere nuovo asse x' la retta s orientata secondo le x crescenti. In altre parole, prendiamo come nuovo versore $\vec{i'}$ il versore $\frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)^T$. Come nuovo asse y' prendiamo invece la retta r orientata nel verso delle x decrescenti e quindi $\vec{j'} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2)^T$. La matrice del cambiamento di coordinate è quindi

$$\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Il cambiamento delle coordinate di vettore è quindi

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{\sqrt{29}}(2v_{x'} - 5v_{y'}) \\ v_y = \frac{1}{\sqrt{29}}(5v_{x'} + 2v_{y'}) \end{cases} \tag{4}$$

Le coordinate del punto $P(x,y)$ dipendono non solo da $\vec{i'}$ e $\vec{j'}$ ma anche da O' e abbiamo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{29}}(2x' - 5y') + k_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{29}}(5x' + 2y') + k_2 \end{cases} \tag{5}$$

Imponendo la condizione che $O'(x'=0, y'=0)$ si ha $O'(x=\frac{9}{29}, y=-\frac{50}{29})$ e dunque

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{29}}(2x' - 5y') + \frac{9}{29} \\ y = \frac{1}{\sqrt{29}}(5x' + 2y') - \frac{50}{29} \end{cases} \tag{6}$$

Viceversa, le trasformazioni inverse, sono

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{29}}(2x + 5y) + h_1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5x + 2y) + h_2 \end{cases} \tag{7}$$

da cui

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\frac{9}{29} - 5\frac{50}{29}) + h_1 \\ 0 = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5\frac{9}{29} - 2\frac{50}{29}) + h_2 \end{cases} \tag{8}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{29}}(2x + 5y) + \frac{232}{29\sqrt{29}} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5x + 2y) + \frac{145}{29\sqrt{29}} \end{cases} \tag{9}$$

Prendiamo ora, ad esempio, la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

Si può verificare che questa circonferenza ha centro $(2, -1)$ e raggio 2. Se sostituiamo in questa equazione (6) otteniamo

$$x'^2 + y'^2 - \frac{14}{\sqrt{29}}x + \frac{14}{\sqrt{29}}y - \frac{18}{29} = 0$$

Si verifica facilmente che questa è una circonferenza di centro $(\frac{7}{\sqrt{29}}, -\frac{7}{\sqrt{29}})$ e raggio

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{14}{\sqrt{29}})^2 + \frac{1}{4}(\frac{14}{\sqrt{29}})^2 + \frac{18}{29}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{14}{\sqrt{29}})^2 + \frac{18}{29}}$$

$$= \sqrt{\frac{98}{29} + \frac{18}{29}} = \sqrt{\frac{116}{29}} = \sqrt{4} = 2$$

come ci aspettavamo. Inoltre il centro, che nel riferimento RC' ha coordinate $(\frac{7}{\sqrt{29}}, -\frac{7}{\sqrt{29}})$, nel riferimento RC ha coordinate

$$x = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\frac{7}{\sqrt{29}} - 5\frac{-7}{\sqrt{29}}) + \frac{9}{29} = \frac{14}{29} + \frac{35}{29} + \frac{9}{29} = \frac{58}{29} = 2$$

e

$$y = \frac{1}{\sqrt{29}}(5\frac{7}{\sqrt{29}} + 2\frac{-7}{\sqrt{29}}) - \frac{50}{29} = \frac{35}{29} - \frac{14}{29} - \frac{50}{29} = -\frac{29}{29} = -1$$

come già visto. (V. Figura 4).

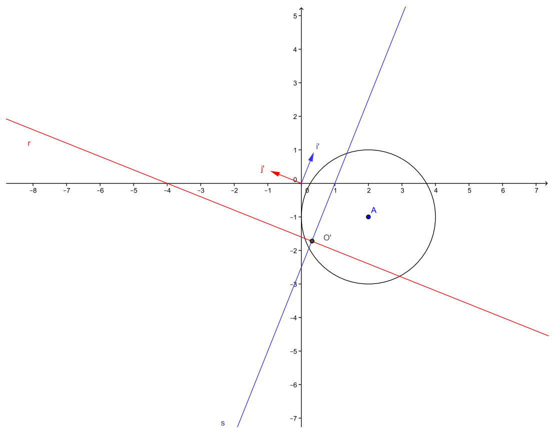

Figura 4

Esempio 1.7. Se prendiamo come nuova base ordinata $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ allora la matrice del cambiamento di base è $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ Vogliamo calcolare le coordinate del vettore $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ nel nuovo sistema di riferimento. Basta prendere M^T e calcolare $M^T\overrightarrow{w}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} - 4 \\ 4\sqrt{3} + 4 \end{pmatrix}$$

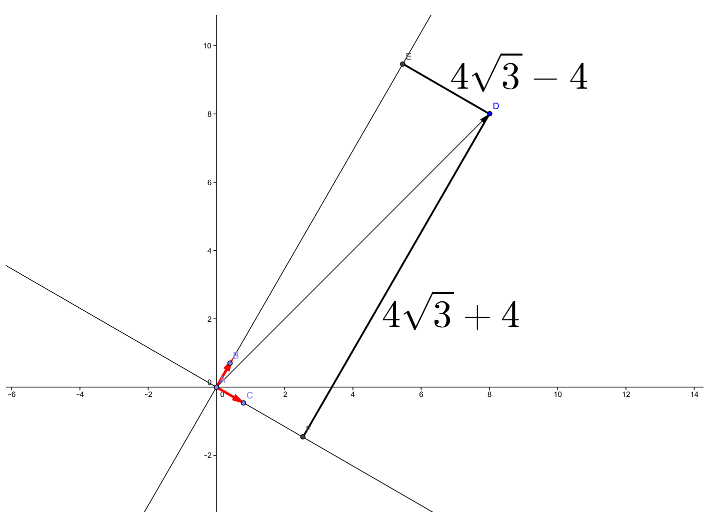

Figura 5

Se poi spostiamo anche l'origine nel punto $(1,2)$ risolviamo

$$\begin{cases} 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + k_1 \\ 0 = \frac{1}{2} + \sqrt{3} + k_2 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $k_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $k_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$. Il cambiamento è quindi

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{cases} \tag{10}$$

e sostituendo $x = 8, y = 8$ si ottiene $x' = \frac{7\sqrt{3}}{2} - 3$ e $y' = 3\sqrt{3} + \frac{7}{2}$.

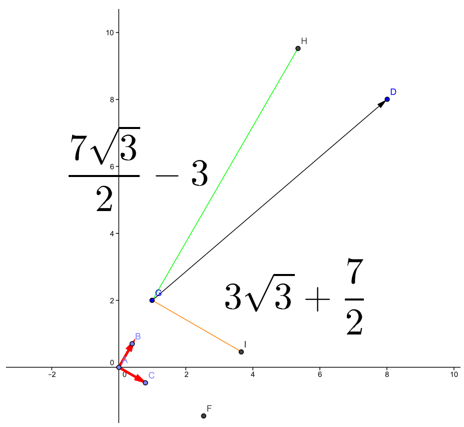

Figura 6

Se abbiamo una retta di equazione cartesiana, ad esempio, $3x + 2y - 7 = 0$ nel sistema di riferimento $RC(Oxy)$ vogliamo vedere come si trasforma l'equazione di questa retta nel sistema $RC(O'x'y')$ appena descritto. Dobbiamo invertire le relazioni 10. Le relazioni inverse si ottengono invertendo la matrice delle coordinate

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + h_1 \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + h_2 \end{cases} \tag{11}$$

e determinando h_1, h_2 sapendo che la "nuova" origine O' ha coordinate $(1,2)$ in RC e coordinate $(0,0)$ in RC', e quindi

$$\begin{cases} 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}0 + \frac{1}{2}0 + h_1 \\ 2 = -\frac{1}{2}0 + \frac{\sqrt{3}}{2}0 + h_2 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 2 \end{cases} \tag{13}$$

Sostituendo si ha

$$
\begin{aligned}
3(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1) + 2(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 2) - 7 = 0 \\
(3\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{1}{2})x' + (3\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2})y' + 3 + 4 - 7 = 0 \\
(\frac{3\sqrt{3}-2}{2})x' + \frac{3+2\sqrt{3}}{2}y' = 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$