1 Ampliamento del piano e coordinate omogenee

Vogliamo dare una idea, senza molte pretese, dei concetti che stanno alla base di alcuni calcoli svolti nella classificazione delle coniche.

Supponiamo di aver una retta r ed un punto A esterno ad essa. (vedi figura 1).

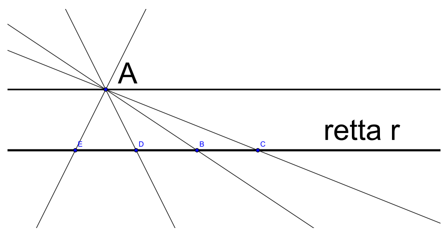

Figura 1

Vi è chiaramente una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta r e le rette del fascio con l'unica eccezione della retta $\bar{r}$ passante per A e parallela alla retta data. Per eliminare questa situazione eccezionale adottiamo la convenzione di associare alla retta $\bar{r}$ un convenzionale punto all'infinito detto anche *punto improprio*. Con questa convenzione potremo dire che due rette parallele hanno in comune il punto improprio che in tal modo viene a rappresentare la direzione comune alle due rette. In questa maniera, possiamo dire che due rette del piano si incontrano sempre, eventualmente nel punto improprio. Quando pensiamo alla retta insieme al suo punto improprio parleremo di *retta ampliata*. Tutte le rette parallele tra loro (un fascio improprio) hanno in comune lo stesso punto improprio. Due rette non parallele invece avranno due punti impropri differenti (in quanto hanno direzioni differenti). Se consideriamo allora l'insieme di tutti i punti impropri si può pensare legittimamente che essi costituiscano una retta, detta retta all'infinito o *retta impropria*.

Quando consideriamo il piano insieme alla retta impropria parleremo di *piano ampliato*.

Tutto ciò è molto suggestivo ma diventa anche utile se introduciamo delle nuove, opportune, coordinate dette *coordinate omogenee*.

Se $P(x, y)$ è un punto proprio del piano, cioè uno dei soliti vecchi punti del piano, consideriamo tre numeri x_0, x_1, x_2 in modo tale che

$$\begin{cases} x = \frac{x_1}{x_0} \\ y = \frac{x_2}{x_0} \end{cases} \tag{1}$$

Diremo allora che la terna (x_0, x_1, x_2) è la terna delle coordinate omogenee del punto P. Queste coordinate sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Ad esempio, il punto $P(3, 4)$ ha coordinate omogenee una qualunque delle terne seguenti $(1, 3, 4), (2, 6, 8), (-3, -9, -12)$ o, in generale ogni terna del tipo $(a, 3a, 4a)$ con $a \neq 0$. Tutte queste terne vengono considerate equivalenti.

Consideriamo allora una retta del piano avente equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a + \ell t \\ y = b + mt \end{cases}$$

sappiamo che queste rappresentano una retta passante per il punto (a, b) e avente parametri direttori (ℓ, m). Un punto generico di questa retta ha coordinate cartesiane $(a+\ell t, b+mt)$ e quindi le sue coordinate omogenee sono, ad esempio, $(1, a+\ell t, b+mt)$. Essendo queste coordinate definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo possiamo prendere anche le coordinate $(\frac{1}{t}, \frac{a}{t}+\ell, \frac{b}{t}+m)$ dopo aver diviso le precedenti per t. Al tendere di $t \to \infty$ il corrispondente punto si allontana verso l'infinito ed il limite, per $t \to \infty$, delle coordinate è $(0, \ell, m)$ che possiamo quindi prendere come coordinate omogenee del punto improprio corrispondente alla retta assegnata.

In questa maniera quindi un punto improprio può essere trattato alla stessa stregua dei soliti punti propri, esso corrisponde ad una terna di coordinate omogenee in cui la prima coordinata è nulla. Ad esempio, il punto $(0, 1, 1)$ è il punto all'infinito della retta di equazione $y = x$.

1.1 Equazioni in coordinate omogenee

Una retta propria di equazione cartesiana $ax+by+c = 0$ si può riscrivere in coordinate omogenee sostituendo le espressioni (1):

$$a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$$

ossia

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$$

questa è una equazione omogenea di primo grado che rappresenta quindi una retta ampliata, infatti non soltanto un qualunque punto proprio della retta soddisfa l'equazione ma anche il suo punto improprio la soddisfa e quindi ha diritto ad essere considerato un punto come tutti gli altri!

Per esempio, la retta di equazione $y = 2x + 1$ contiene, ad esempio, il punto $(0, 1)$ ed ha parametri direttori $\ell = 1, m = 2$. Sostituendo, come detto sopra, le coordinate omogenee (1) si ottiene l'equazione omogenea $x_0 + 2x_1 - x_2 = 0$. È immediato ora verificare che le coordinate omogenee del punto, ad esempio, $(0, 1)$, che sono una qualunque delle terne equivalenti $(1, 0, 1), (2, 0, 2), (a, 0, a)$ con $a \neq 0$, soddisfano l'equazione omogenea:

$$\begin{gathered} 1 + 0 - 1 = 0 \\ 2 + 0 - 2 = 0 \\ a + 0 - a = 0 \end{gathered}$$

ma anche la terna $(0, 1, 2)$, o equivalentemente $(0, 2, 4), (0, -1, -2)$, soddisfa la stessa equazione

$$\begin{gathered} 0 + 2(1) - 2 = 0 \\ 0 + 2(2) - 4 = 0 \\ 0 + 2(-1) - (-2) = 0 \end{gathered}$$

Con queste notazioni possiamo facilmente scrivere anche l'equazione cartesiana omogenea delle retta impropria. Non è difficile convincersi che la sua equazione è $x_0 = 0$.

1.2 Le coniche: punti all'infinito

Applichiamo quanto visto all'equazione di una generica conica. Poniamo

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \tag{2}$$

Questa si può riscrivere come

$$F(x_0,x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \tag{3}$$

che si dice equazione omogenea della conica. Essa è soddisfatta da tutti i punti propri della conica più eventuali punti impropri.

Ora domandiamoci come possiamo distinguere un'ellisse da un'iperbole? Un punto di vista fruttuoso è quello di pensare alle possibili intersezioni della conica con la retta all'infinito. È ragionevole pensare che l'ellisse non avrà intersezioni reali con la retta all'infinito (essendo una curva chiusa e limitata), mentre un'iperbole avrà due intersezioni e che infine una parabola avrà due intersezioni coincidenti. In altre parole possiamo distinguere le coniche nel modo seguente: La conica è una iperbole, parabola, ellisse a seconda che l'intersezione con la retta impropria è costituita, rispettivamente, da due punti reali e distinti, un punto, due punti complessi (e quindi la retta all'infinito risulta, rispettivamente, secante, tangente, esterna alla conica).

Per distinguere allora le coniche studiamo il sistema formato dall'equazione (3) e dall'equazione della retta impropria $x_0 = 0$; ciò significa semplicemente porre $x_0 = 0$ nella (3) ottenendo

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0 \tag{4}$$

(in cui abbiamo cambiato nome alle variabili per maggior chiarezza). Ora quello che ci resta da studiare è il segno del discriminante di questa equazione. Risulta

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\alpha_{00}$$

Possiamo quindi concludere che se $\alpha_{00} > 0$ avremo un'ellisse, se $\alpha_{00} < 0$ avremo un'iperbole, se $\alpha_{00} = 0$ avremo una parabola. Non solo, ma lo studio delle soluzioni dell'equazione (4) fornisce i parametri direttori degli asintoti, nel caso dell'iperbole, dell'asse di simmetria, nel caso della parabola; nessuna soluzione reale, invece, nel caso dell'ellisse.

1.3 Le coniche: degeneri e non degeneri

Un esempio di conica degenere è per esempio la seguente:

$$(x+y+2)(x-2y+3) = 0$$

che è, evidentemente, l'insieme delle due rette di equazioni $x+y+2 = 0$ e $x-2y+3 = 0$. Tuttavia, se avessimo moltiplicato le due equazioni ottenendo: $x^2 - xy - 2y^2 + 5x - y + 6 = 0$ non sarebbe stato altrettanto evidente che si tratta di due rette. Come distinguere questa situazione degenere dalla situazione non degenere? Il punto chiave è quello di studiare l'esistenza di eventuali *punti doppi*. Ad esempio, il punto $(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$, che è il punto di intersezione delle due rette che compongono la conica di questo esempio, è un punto doppio, cioè un punto che deve essere contato due volte in quanto appartiene a entrambe le componenti. Vale infatti il seguente

Teorema 1.4. *Una conica è degenere se e solo se possiede almeno un punto doppio.*

Per distinguere quindi le coniche degeneri dalle non degeneri possiamo andare a cercare gli eventuali punti doppi. Per far ciò utilizziamo il seguente

Teorema 1.5. *Un punto è doppio se e solo se le derivate prime dell'equazione omogenea si annullano contemporaneamente in quel punto.*

Applicando questi teoremi possiamo allora andare a calcolare le derivate della funzione $F(x_0, x_1, x_2)$. Indichiamo con F_{x_i} la derivata della funzione rispetto alla variabile x_i, $i = 0, 1, 2$ (quando si calcola la derivata rispetto ad una variabile le altre due vengono considerate costanti). Abbiamo allora

$$\begin{cases} F_{x_0} = 2a_{00}x_0 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 = 0 \\ F_{x_1} = 2a_{01}x_0 + 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0 \\ F_{x_2} = 2a_{02}x_0 + 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

Si tratta allora di cercare autosoluzioni di un sistema lineare omogeneo. Sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di autosoluzioni è che il determinante della matrice sia nullo. Come conseguenza abbiamo

Corollario 1.6. *Una conica di equazione (3) è degenere se e solo se il determinante della sua matrice è nullo.*

2 Qualche esempio

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che è una matrice simmetrica di rango 1. Quale è la conica corrispondente? Possiamo scrivere l'equazione (non omogenea):

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + 6y + 1 = 0 \tag{5}$$

e domandarci quale è il grafico di questa conica. La teoria ci dice che questa è una conica degenere. Inoltre, essendo, il rango 1, essa ammette ∞^2 soluzioni che corrisponde ad una retta di punti doppi. In altre parole dovrà essere una retta doppia. Quale? Per determinarla, pensiamo di risolvere (5) rispetto alla y pensando ad x come ad un parametro:

$$9y^2 + (12x + 6)y + 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Calcoliamo il discriminante Δ:

$$\Delta = (12x + 6)^2 - 36(4x^2 + 4x + 1) = 36(2x + 1)^2 - 36(4x^2 + 4x + 1) =$$

$$= 36(4x^2 + 4x + 1) - 36(4x^2 + 4x + 1) = 0$$

come si poteva prevedere dal calcolo di α_{00}. Applicando ora la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado abbiamo:

$$y = \frac{-(12x+6)}{18} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

La conica, dunque, è la retta di equazione $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ contata due volte.

Osserviamo che la retta trovata si può riscrivere come $2x+3y+1=0$ e che questa ha come coefficienti proprio i numeri che appaiono come prima riga della matrice. In effetti, sappiamo che quella matrice è proprio la matrice del sistema le cui soluzioni danno i punti doppi. Nel nostro esempio, quella matrice ha rango 1. Il sistema ha dunque ∞^2 soluzioni e rappresenta quindi l'intera retta doppia.

Se il rango è 2 la situazione è diversa, le equazioni che hanno per coefficienti le righe della matrice non sono più le equazioni delle componenti della conica, tuttavia la loro intersezione è il punto doppio cercato.

Per esempio, nell'equazione $2x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 1 = 0$ il rango è due e si tratta di un'ellisse degenere. L'unico punto reale si trova risolvendo il sistema che ha per matrice la matrice della conica, nella fattispecie $(-1, -1/2)$.

3 Centro di una conica

Un'ellisse o un'iperbole in forma canonica hanno chiaramente l'origine come centro di simmetria. Ciò non accade per la parabola. Diremo che l'ellisse e l'iperbole sono coniche a centro. Se $P(x_0, y_0)$ soddisfa l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ allora anche il punto $Q(-x_0, -y_0)$ la soddisfa.

In generale, per un'ellisse o iperbole non necessariamente in posizione canonica, come possiamo determinare il suo centro di simmetria?

Ragioniamo come segue. Nell'equazione (2) possiamo operare una traslazione

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \tag{6}$$

e sostituendo abbiamo

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + (2a_{11}a + 2a_{01} + 2a_{12}b)X + (2a_{12}a + 2a_{22}b + 2a_{02})Y + k = 0 \tag{7}$$

k una costante opportuna. Ora il punto (a, b) è il centro della conica precisamente quando, nell'equazione (7), si ha che l'equazione non varia sostituendo $(-X, -Y)$ invece di (X, Y), e questo avviene se e solo se si annullano i coefficienti di X e Y nella (7). Abbiamo dunque che la condizione necessaria e sufficiente affinché un punto (a, b) sia il centro della conica è che si verifichino simultaneamente le equazioni

$$\begin{cases} 2a_{11}a + 2a_{12}b + 2a_{01} = 0 \\ 2a_{12}a + 2a_{22}b + 2a_{02} = 0 \end{cases}$$

Utilizzando la regola di Cramer otteniamo immediatamente le formule 7.2.1 del testo:

$$a = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}}, b = \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}$$

dove $\alpha_{01}, \alpha_{00}, \alpha_{02}$ sono i complementi algebrici (ricordiamoci che la definizione include un segno $+$ o $-$) degli elementi a_{01}, a_{00}, a_{02} della matrice della conica.