

Programma del corso di Geometria (AA 13-14)

Elettronica-Comunicazioni

Insiemi. Unione, intersezione, complementare di un insieme. Insieme delle parti.

Prodotto cartesiano tra insiemi. Relazioni. Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza. Funzioni. Funzioni iniettive, suriettive. [1, Capitolo 1].

Funzioni. Funzioni iniettive, suriettive. Composizione di funzioni. Funzioni invertibili. Operazioni. Permutazioni. Permutazioni pari e dispari. [1, Capitolo 1].

Operazioni nell'insieme $\mathbf{R}^n$. Concetto di spazio vettoriale. Combinazione lineare. [1, Capitolo 2].

Dipendenza lineare. Generatori. Sottospazio. Vettori linearmente indipendenti. [1, Capitolo 2] [4, Capitolo 2]

Base di uno spazio vettoriale. Concetto di dimensione. Base canonica (naturale, standard) di $\mathbf{R}^n$. Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. [1, Capitolo 2] [4, Capitolo 2]

Introduzione alle matrici. Ordine di una matrice. Struttura di spazio vettoriale nell'insieme delle matrici. [2, Capitolo 1]. Trasposizione di matrici e proprietà. Matrici simmetriche.

Introduzione al metodo di eliminazione di Gauss. [2, Capitolo 1].

Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Forma a scala di una matrice.

Forma a scala ridotta. Pivot. Rango di una matrice come numero dei pivot. Metodo di soluzione dei sistemi lineari mediante la riduzione a scala. Cenni al teorema di Rouché-Capelli [2, Capitolo 1].

Moltiplicazione tra matrici. Proprietà del prodotto tra matrici. Ordini compatibili.

Prodotto non commutativo. Matrice identità. Matrici invertibili. Matrici nilpotenti. [2, Capitolo 1]

Condizione di incompatibilità di un sistema: pivot nell'ultima colonna della matrice completa o equivalentemente rango di A diverso da rango di C . Sistemi omogenei.

L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di dimensione $n-r$. Moltiplicazione a blocchi di matrici. Interpretazione di un sistema $AX=B$ secondo le colonne della matrice A . [2, Capitolo 1]

Esercizi di pagina 52 di [2]. Matrice invertibile di ordine 2.

Algoritmo di inversione. Proprietà dell'inversione di matrici. Unicità della matrice

inversa. Inversa di un prodotto. Condizioni di invertibilità di una matrice. [2, Capitolo 1].

Matrici elementari. Una matrice è invertibile se e solo se è il prodotto di matrici elementari. Introduzione alla decomposizione LU . [2, Capitolo 1; 1, Sezione 3.8]

Risoluzione di un sistema di equazioni lineari mediante la decomposizione LU .

Definizione di determinante di una matrice quadrata. Primo Teorema di Laplace. [2, Capitolo 2; 1, Capitolo 3]

Definizione di determinante usando i prodotti competenti. Regola di Sarrus. Primo Teorema di Laplace. [1, sez.3.3]

Cofattori o complementi algebrici. Determinante della matrice trasposta. [2, Capitolo 2]

Operazioni elementari e proprietà del determinante. Teorema di Binet (o del prodotto).

Determinante della matrice inversa. Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Matrice aggiunta. Formula per la matrice inversa. Regola di Cramer.

Formula di aggiunzione. Dimostrazione del teorema di Binet mediante matrici elementari. Introduzione alla diagonalizzazione di matrici. Definizione di autovalore e autovettore. Polinomio caratteristico ed equazione caratteristica. [2, Capitolo 2] Matrici simili. Relazione di similitudine. Matrice diagonalizzabile. Autovalori e autovettori. Polinomio caratteristico. Equazione caratteristica. Esempi di ordine 2. [2, Capitolo 2]

Cenni sui numeri complessi. Operazioni con i numeri complessi. Coniugato. Modulo. Forma trigonometrica di un numero complesso. Potenze e radici n-esime. [2, Capitolo 2. v. anche <http://www.ateneonline.it/nicholson/studenti/AppendiceA.pdf>; può inoltre essere utile l'appendice A del libro: Introduzione alla Geometria e all'algebra lineare, di Paolo Maroscia, ed. Zanichelli]

Ancora sulla diagonalizzazione di matrici. Matrici diagonalizzabili e matrici non diagonalizzabili. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. [2, Capitolo 2] Ancora sulle proprietà della similitudine di matrici. Teorema di Cayley-Hamilton. Calcolo dell'inversa tramite il Teorema di Cayley-Hamilton. Successioni definite per ricorrenza. Successione di Fibonacci. [2, Capitolo 2]

Calcolo delle potenze di una matrice mediante il Teorema di Cayley-Hamilton. Rango per righe. Rango per colonne. Rango per minori. Teorema degli orlati. Applicazione alla risoluzione di sistemi lineari. [1, Capitolo 3]

Definizione di vettori liberi del piano. Spazio vettoriale V_2 . Coordinate cartesiane ortogonali. Identificazione di V_2 con $\mathbf{M}(2 \times 1)$. Condizione di allineamento di tre punti. Dipendenza lineare di vettori e suo significato geometrico. Equazione cartesiana della retta. [1, Capitolo 6].

Prodotto scalare in V_2 . Formula per il coseno. Parametri direttori e coseni direttori. Passaggio dalle equazioni parametriche all'equazione cartesiana e viceversa. [1, Capitolo 6].

Condizione di parallelismo e di perpendicolarità di due rette. Area di un triangolo. Formula per la distanza punto-retta. [1, Capitolo 6].

Circonferenze. Cambiamento di coordinate. Base ortonormale. Matrice del cambiamento di coordinate. Matrici ortogonali. [1, Capitolo 6]

Cambiamento di coordinate di vettore e di punto.

Applicazioni lineari. Esempi di applicazioni lineari e non lineari. Matrice standard di una applicazione lineare. Isometrie. Rotazioni. Riflessioni. Proiezione ortogonale. Coefficiente di Fourier. [1, Capitolo 6],[2, Capitolo 3.5]

Corrispondenza tra applicazioni lineari e matrici. Composizione di applicazioni e prodotto di matrici. [2, Capitolo 3.5]

Introduzione alle coniche. Definizione dell'ellisse, parabola, iperbole come luoghi geometrici mediante l'eccentricità.

Coniche in equazione canonica. [1, Capitolo 6]

Fascio di rette proprio e improprio. Teorema di Classificazione delle coniche: coniche generali e degeneri; ellisse, iperbole, parabola. [1, Capitolo 7]. Ampliamento del piano. Coordinate omogenee. Retta ampliata e piano ampliato. Retta impropria. Intersezione della retta impropria con una conica. Condizione necessaria e sufficiente affinché una conica sia generale. Centro di una conica. [1, Capitolo 7]

Riduzione a forma canonica di una conica a centro. Riduzione a forma canonica di una parabola. Equazione dell'asse di simmetria. Studio e significato degli autovettori e autovalori della matrice A_{00} . [1, Capitolo 7]

Introduzione alla geometria analitica dello spazio. Spazio vettoriale V_3 . Coordinate cartesiane ortogonali nello spazio. Vettori geometrici linearmente dipendenti se e solo se complanari.

Basi equiverse e contraverse. Definizione di prodotto vettoriale. Prime proprietà. Formula per il calcolo del prodotto vettoriale. [1, Capitolo 8] [2, Paragrafo 3.4]

Significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale. Prodotto misto. Formula per il prodotto misto e significato geometrico del prodotto misto. Condizione analitica affinché quattro punti o tre vettori siano complanari. Equazione cartesiana di un piano. Vettore normale al piano. Condizione di parallelismo tra due piani. [1, Capitolo 8] [2, Capitolo 3].

Condizione di perpendicolarità tra due piani. Equazione cartesiana di una retta in forma parametrica e cartesiana. Formule per i parametri direttori. Condizione di parallelismo tra due rette. [1, Capitolo 8]

Rette sghembe, rette complanari. Condizioni di complanarità. Posizioni reciproche di due rette. Distanza tra due rette parallele. Distanza tra due rette sghembe. Metodo del punto mobile. Retta di minima distanza. [1, Capitolo 8]

Distanza punto-retta. Distanza punto-piano. Sfere. Circonferenza nello spazio. Introduzione alle quadriche in forma canonica.

Quadriche generali: Ellissoide, Iperboloide iperbolico (a una falda) e iperboloide ellittico (o a due falde), paraboloidi ellittico e paraboloidi iperbolico (o a sella). Qualche esempio di quadriche degeneri: coni e cilindri. [1, Capitolo 8].

Spazi vettoriali generali. Esempi. Spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. Spazio vettoriale P_n dei polinomi di grado minore o uguale a n in una indeterminata. Spazio vettoriale delle funzioni continue reali di variabile reale. [2, Capitolo 5.1]

Esempi di spazi e sottospazi vettoriali. Calcolo di dimensioni. Spazio vettoriale delle successioni di Fibonacci. [2, Capitolo 5.1]

Teorema fondamentale. Teorema di Invarianza. Spazio finitamente generato. Lemma di Indipendenza. Lemma di Dipendenza. Teorema di esistenza di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato. [2, Capitolo 5.2]

Dimensione dello spazio delle matrici simmetriche e dello spazio delle matrici antisimmetriche. Trasformazioni lineari. Estensione per linearità di trasformazioni. Definizione ed esempi di nucleo e immagine di una trasformazione lineare. [2, Capitolo 5.3]

Esempi di nucleo e immagine di una trasformazione lineare. Teorema delle dimensioni. [2, Capitolo 5.3]

Conseguenze del teorema delle dimensioni. Esempi. Isomorfismo. Se uno spazio vettoriale ha dimensione n allora è isomorfo a $\mathbf{R}^n$. Coordinate rispetto ad una base. Isomorfismo C_B . [2, Capitolo 5.4]

Teorema di Rouché-Capelli come conseguenza del teorema delle dimensioni. Matrice di una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita. [2, Capitolo 5.4]

Matrice di cambiamento di base. [2, Capitolo 5.4]

Relazione tra due matrici dello stesso endomorfismo. Definizione di rango, determinante, autovalori, autovettori, diagonalizzazione, etc di un endomorfismo. [2, Capitolo 5.5]

Generalizzazione della nozione di distanza, angoli, ortogonalità. Prodotto scalare astratto. Nozione di spazio euclideo. Esempi. Complemento ortogonale di un sottospazio. [2, Capitolo 5.6][1, Capitolo 15 e Sezione 17.3]

Nozione generale di base ortogonale. Teorema dello sviluppo di Fourier. Esistenza delle basi ortogonali: Procedimento di Gram-Schmidt. [1, Capitolo 15 e 17.3] [2, Capitolo 5.7]

Prodotti scalari sullo spazio dei polinomi. Polinomi di Lagrange. [2, Capitolo 5.7]

Teorema della proiezione e teorema dell'approssimazione. [2, Capitolo 5.7]

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Soluzioni approssimate di un sistema non risolubile: equazioni normali, metodi dei minimi quadrati. [2, Capitolo 5.7, Capitolo 4.6]

Alcune proprietà importanti delle matrici simmetriche: autovalori reali e ortogonalità. Teorema degli assi principali (o spettrale).[2, Capitolo 4.7, 1, Capitolo 15 e 17].

I riferimenti sono ai seguenti testi:

1. S. Capparelli – A. Del Fra: *Geometria*, Esculapio, 2010 Errata Corrigé del testo

2. W. Keith Nicholson: *Algebra Lineare, dalle applicazioni alla teoria*, McGraw-Hill 2002

3. P. Maroscia: *Geometria e Algebra Lineare*, Zanichelli, 2002

4. S. Capparelli – A. Del Fra: *Esercizi di Geometria*, Esculapio, 2012 Errata Corrigé del libro di esercizi