

1. Esercitazione

1. Dare vari esempi di matrici quadrate di ordine 2 tali che
 - $A^2 = -I$
 - $B^2 = 0$ ma nessuno dei coefficienti di B è nullo.
 - $AB = AC$ ma $B \neq C$ (la matrice nulla non vale!)
2. Quali delle seguenti matrici sono simmetriche
 - $A^T A$
 - $A^T A A^T$
 - $A^T + A$

3. Usare l'algoritmo di inversione di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

4. Dimostrare che se A è una matrice invertibile, allora

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

5. Dimostrare che se A è una matrice con determinante uguale a zero allora essa ammette un autovalore nullo.
6. Vero o falso: Se A è una matrice invertibile allora essa è necessariamente diagonalizzabile (dare un ragionamento che spieghi perché ciò è vero oppure dare un esempio per dimostrare che non è vero).
7. Una delle seguenti tre matrici è chiaramente diagonalizzabile (si vede senza fare calcoli), le altre due possono esserlo oppure no, ma bisogna verificare. Studiare i tre casi.

•

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

•

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

•

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Spiegare se i seguenti sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$

- Tutti i vettori aventi prima coordinata uguale a 1.
 - Tutti i vettori aventi prima coordinata non negativa.
 - Tutti i vettori a coordinate intere.
9. Scrivere le equazioni cartesiane di due piani di $\mathbb{R}^4$ che si intersecano solo nell'origine.
10. Scrivere il vettore

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare di

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11. Scomporre il vettore

$$V = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

nelle sue componenti parallela al vettore

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e perpendicolare allo stesso vettore

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

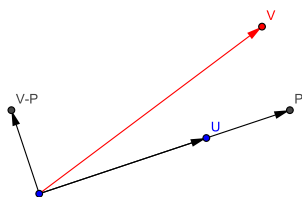


Figura 1

12. Dimostrare che, se U è un sottospazio di uno spazio euclideo V allora $U^\perp$ è anch'esso un sottospazio.
13. Determinare la matrice che rappresenta la seguente trasformazione lineare: trasforma $\mathbb{R}^2$ prima ruotando di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario e poi riflettendo rispetto alla retta di equazione $x + y = 0$.
14. Se la trasformazione T ruota il piano in senso antiorario di 30 gradi e poi lo dilata di un fattore 5, qual è la sua matrice?

15. Ricordiamo che, se A è una matrice $m \times n$ si definisce *annullatore* di A , $\text{null}(A)$, il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dei vettori X tali che $AX = 0$, (cioè sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a A) e si definisce $R(A)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A .

- Dimostrare che $R(A) = (\text{null}(A))^\perp$
- Spiegare perché non è possibile avere una matrice che abbia lo spazio delle righe e lo spazio annullatore entrambi contenenti il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Calcolare una base per $R(A)$ e per $\text{null}(A)$ nel caso della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

e verificare che sono ortogonali tra loro.

16. Trovare la retta che meglio approssima i seguenti dati

$$(0, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 5)$$

17. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortogonale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

18. Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Studiare la seguente conica

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + x - 3y = 1$$

20. Dimostrare che data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ allora la retta di equazione $ax + by = 0$ è tangente alla circonferenza nell'origine. Verificare questo fatto nel caso della circonferenza $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Tracciare un disegno.