

Svolgiamo un esercizio preso dal Nicholson pag. 179 che illustra in un caso importante l'uso delle matrici per studiare successioni definite per ricorrenza. Il problema è il seguente. Supponiamo che un'urbanista voglia determinare in quanti modi un dato numero di parcheggi possa essere riempito con automobili e camion, sapendo che un camion occupa il doppio dello spazio di un'automobile. Vogliamo inoltre poter dare una stima di x_k per k grande. Se indichiamo con k il numero di spazi disponibili, diciamo x_k il numero di modi in cui gli spazi possono essere riempiti. Ad esempio se $k = 1$ evidentemente c'è un solo modo di riempirlo e quindi $x_1 = 1$; se gli spazi sono due, $k = 2$, allora si possono riempire con due auto oppure con un camion: $x_2 = 2$. Se gli spazi sono tre, $k = 3$, si possono sistemare tre auto, aaa , oppure prima un camion e poi un'auto, Ca , oppure prima un'auto e poi un camion, aC : in tutto $x_3 = 3$. In generale possiamo dimostrare che $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$, $k \geq 0$, come segue.

Se dobbiamo riempire $k + 2$ spazi possiamo farlo in due modi complementari:

1. Nel primo spazio sistemiamo un'auto e i rimanenti $k + 1$ spazi possono essere riempiti in x_{k+1} modi.
2. Nel primo spazio sistemiamo un camion e i rimanenti k spazi possono essere riempiti in x_k modi

In totale abbiamo quindi $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$. Possiamo fissare per convenzione anche $x_0 = 1$. In tal modo la successione si può calcolare facilmente:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1, x_1 = 1 \\
 x_2 &= x_1 + x_0 = 2 \\
 x_3 &= x_2 + x_1 = 3 \\
 x_4 &= x_3 + x_2 = 5 \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{0.1}$$

Si dice che la successione è definita per ricorrenza dalla legge $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ e dalle condizioni iniziali $x_0 = 1, x_1 = 1$. Questa è una successione famosa: la successione di Fibonacci.

Per rispondere alle richieste del problema procediamo a definire il vettore

$$v_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$$

ed è facile verificare che il vettore v_{k+1} si può ottenere:

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$$

e che quindi, iterando questo calcolo si ha

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Dovendo calcolare le potenze della matrice A , andiamo a diagonalizzarla. Si può calcolare che il polinomio caratteristico è $c_A(x) = x^2 - x - 1$ avente radici

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

ed autovettori, rispettivamente

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

è la matrice diagonalizzante. Si verifica inoltre che

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$P^{-1}AP = D$$

dove $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Otteniamo quindi

$$v_k = A^k v_0 = PD^k P^{-1} v_0$$

Svolgiamo qui sotto tale calcolo:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} v_0 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1^k \lambda_2 & \lambda_1^k \\ \lambda_1 \lambda_2^k & -\lambda_2^k \end{pmatrix} v_0 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_1^k \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^k + \lambda_1^k - \lambda_2^k \\ -\lambda_1^{k+1} \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^{k+1} + \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{0.2}$$

Essendo

$$v_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$$

confrontando abbiamo che

$$x_k = \frac{-\lambda_1^k \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^k + \lambda_1^k - \lambda_2^k}{\sqrt{5}} = \frac{\lambda_1^k (-\lambda_2 - 1) + \lambda_2^k (\lambda_1 - 1)}{\sqrt{5}}$$

Osserviamo ora che $1 - \lambda_2 = \lambda_1$ e che $\lambda_1 - 1 = -\lambda_2$. In definitiva quindi

$$x_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\sqrt{5}} \tag{0.3}$$

Abbiamo così ottenuto una formula esatta per il k -esimo numero della successione. Volendo avere una stima del valore di x_k si può osservare che λ_1 è circa 1,618, quindi in modulo maggiore di 1, mentre $\lambda_2 = -0,618$, in modulo minore di 1. Si ha, di conseguenza, che per k grande, il contributo di λ_2 è trascurabile e quindi

$$x_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_1^{k+1}$$

Per esempio, se $k = 20$ il valore esatto è 10946 mentre il valore approssimato dato dalla formula è 10945,999981...