

Esempio 1.6 Il seguente tipo di forza fornisce un esempio di problema di moto di particolare interesse. Per esso si ricava immediatamente un “teorema di conservazione”: *quando la componente lungo un asse fisso, per esempio l'asse x , della forza totale \vec{f} è identicamente nulla, la componente della quantità di moto lungo quell'asse: $m\dot{x}$ rimane costante durante ogni moto effettivo*

$$\vec{f} \cdot \vec{e}_1 \stackrel{\forall t}{\equiv} 0 \quad \text{implica} \quad \vec{a} \cdot \vec{e}_1 \stackrel{\forall t}{\equiv} 0 \quad \text{e quindi} \quad m \dot{x} = \text{cost} = m \dot{x}_0 .$$

Infatti: ponendo nella (1.1) con una tale forza una (qualunque) delle sue soluzioni e moltiplicati scalarmente ambo i membri per \vec{e}_1 , si ottiene la seguente identità

$$m \ddot{\overrightarrow{OP}}(t) \cdot \vec{e}_1 = \vec{f}(\overrightarrow{OP}(t), \overrightarrow{OP}(t), t) \cdot \vec{e}_1 = 0 .$$

In essa si riconosce a primo membro la derivata rispetto al tempo della funzione $m \dot{x}(t)$. Pertanto, integrando rispetto al tempo ambo i membri dell'uguaglianza, si deduce che in ciascun istante durante una soluzione (qualsiasi) della (1.1) con una tale forza, e cioè durante un qualsiasi moto effettivo prodotto da una tale forza, si ha

$$\dot{x}(t) = \text{cost} = \dot{x}_0 .$$

Il fatto che ciò accada per una qualsiasi soluzione della (1.1) prodotta da una tale forza, insieme con il fatto che ne coinvolga i caratteri differenziali solo fino al primo ordine, sono di grande importanza. Essi infatti permettono di riconoscere nel risultato così ottenuto una conseguenza differenziale della (1.1) del tipo: *in ciascun istante, durante un moto effettivo prodotto da quella forza, sussiste fra le variabili di stato la relazione: $\dot{x} = \dot{x}_0$, e quest'ultima risulta un'equazione differenziale del primo ordine necessariamente verificata da tutte le soluzioni della (1.1) con una tale forza.* Tale equazione differenziale può essere risolta, o almeno discussa in modo qualitativo, senza far ulteriore ricorso alla (1.1). In questo esempio, la sua soluzione è $x(t) = \dot{x}_0 t + x_0$; questa rappresenta una caratteristica necessaria comune a tutti i moti soluzioni della (1.1) con una tale forza, ed è stata determinata *non risolvendo la (1.1) bensì solo la sua conseguenza: $\dot{x} = \dot{x}_0$.* \square

N.B. 1.7 Per generalizzare il procedimento, si può ricorrere alla seguente notazione. Si chiami \mathbf{w} il campo della (1.3) scritta (in coordinate) nella prima delle due forme indicate, e cioè

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}(\mathbf{u}) , \quad \text{con} \quad \mathbf{u} := \left(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t \right)_e .$$

Nell'ipotesi semplificativa per la quale la forza $\vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t)$ non dipende esplicitamente da t si ha in particolare

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}) := \left(\vec{v}, \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v})/m \right)_e \quad \text{con} \quad \mathbf{u} := \left(\overrightarrow{OP}, \vec{v} \right)_e .$$

Con tale notazione, si chiami $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{u}) \equiv \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$ la funzione scalare $\mathcal{F}(\mathbf{u}) := m \dot{x}$, e si denotino con $\nabla_{\overrightarrow{OP}} \mathcal{F}$ e $\nabla_{\vec{v}} \mathcal{F}$ i vettori gradienti di \mathcal{F} relativi rispettivamente alle coordinate di posizione e a quelle di velocità (supposti entrambi esistenti). Si osserva che la \mathcal{F} è tale che *risulta nulla la sua Derivata Direzionale $D_{\mathbf{u}}$*

rispetto alla direzione $\mathbf{w} := (\vec{v}, \vec{f}/m)$ e cioè la

$$D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\mathbf{u}) := \nabla_{\overrightarrow{OP}}\mathcal{F} \cdot \vec{v} + \nabla_{\vec{v}}\mathcal{F} \cdot \frac{1}{m} \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) = f_x = 0.$$

Questo implica che, identicamente lungo ciascuna delle soluzioni della (1.1), si ha (con leggero abuso di notazione) $\mathcal{F}(\overrightarrow{OP}(t), \dot{\overrightarrow{OP}}(t)) = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}_0, \vec{v}_0)$.

Memento 1.8 *Integrale primo di un'equazione differenziale autonoma del tipo $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}(\mathbf{u})$ è una funzione scalare di stato $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$ (regolare sull'aperto \mathbb{D} di regolarità di \mathbf{w} , e non identicamente costante) il cui valore rimane costante lungo ciascuna soluzione dell'equazione differenziale.*

Equivalentemente, (si veda oltre): indicata con $\mathbf{u}(t, \mathbf{u}_0)$ la soluzione dell'equazione che corrisponde al generico, arbitrario, dato iniziale \mathbf{u}_0 , e che quindi verifica l'identità $\dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{u}_0) = \mathbf{w}(\mathbf{u}(t, \mathbf{u}_0))$ comunque sia stato fissato \mathbf{u}_0 , si ha che *Integrale primo dell'equazione è una funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{u})$ (regolare su \mathbb{D} , non identicamente costante) tale che*

$$\text{su } \mathbb{D} \quad \text{si abbia} \quad D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\mathbf{u}) \equiv 0.$$

In tal caso, e comunque sia stato scelto \mathbf{u}_0 , in sua corrispondenza si ha

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(\mathbf{u}(t, \mathbf{u}_0)) = \left(\mathbf{w}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{F}(\mathbf{u}) \right) (t) \stackrel{\forall t}{\equiv} 0;$$

e quindi, comunque sia scelto \mathbf{u}_0 ,

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}(t, \mathbf{u}_0)) \stackrel{\forall t}{\equiv} \mathcal{F}(\mathbf{u}_0).$$

□

L'esistenza di una o più funzioni integrali non banali è rara e dipende dalle proprietà globali in D del campo. Le curve di fase $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ hanno in generale una struttura ben più complicata di quella delle linee di livello $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \text{cost}$ di una funzione \mathcal{C}^1 su tutto \mathbb{D} . Questo accade, per esempio, se tutte le curve di fase “entrano” in un punto o si avviano definitivamente verso un qualche sottoinsieme di curve di fase di \mathbb{D} ; la continuità di \mathcal{F} impone in tal caso che il valore che \mathcal{F} assume sul punto, o sulle traiettorie in questione, sia lo stesso ovunque in \mathbb{D} : se il flusso ammette qualche insieme che globalmente attrae tutte le traiettorie questo non può essere un sistema conservativo. ◇

N.B. 1.9 Nella notazione delle equazioni vettoriali del secondo ordine, come l'equazione di Newton (1.1), tutto ciò si specializza come segue: Integrale primo dell'equazione differenziale autonoma $m\ddot{\mathbf{a}} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$ è una funzione scalare di stato (ma non identicamente costante) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$ il cui valore rimane costante lungo ogni soluzione $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(t)$ dell'equazione differenziale stessa (ogni moto dinamicamente possibile) e in particolare ogni moto effettivo. Essa pertanto è una funzione scalare $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$ (non identicamente costante) per la quale risulta

$$(1.5) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}(t), \dot{\overrightarrow{OP}}(t)) = \left(\nabla_{\overrightarrow{OP}}\mathcal{F} \cdot \dot{\overrightarrow{OP}} + \nabla_{\vec{v}}\mathcal{F} \cdot \ddot{\overrightarrow{OP}} \right) (t) \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$$

quando $\vec{OP}(t), \dot{\vec{OP}}(t), \ddot{\vec{OP}}(t)$ sono quelle che competono a un (qualsiasi) moto effettivo, soluzione della $m\vec{a} = \vec{f}(\vec{OP}, \vec{v})$ per fissati (qualsiasi) dati iniziali.

Si chiami $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\vec{OP}, \vec{v})$ la derivata direzionale $D_{\mathbf{w}}$ di \mathcal{F} rispetto a $\mathbf{w} = (\vec{v}, \vec{f}/m)$. Quando si calcola la \mathcal{G} lungo un qualunque moto $\vec{OP} = \vec{OP}(t)$ si ha

$$\mathcal{G}(\vec{OP}(t), \vec{v}(t)) := D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\vec{OP}(t), \vec{v}(t)) = \left(\nabla_{\vec{OP}}\mathcal{F} \cdot \vec{v} + \nabla_{\vec{v}}\mathcal{F} \cdot \frac{1}{m} \vec{f}(\vec{OP}, \vec{v}) \right) (t).$$

Se, in particolare, il moto è soluzione dell'equazione $m\vec{a} = \vec{f}(\vec{OP}, \vec{v})$, e se la funzione \mathcal{F} ne è un integrale primo (nel senso che sussiste la (1.5) qualunque sia tale moto, soluzione dell'equazione detta) allora senz'altro

$$\dot{\vec{OP}}(t) = \vec{v}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{\vec{OP}}(t) = \vec{f}(\vec{OP}(t), \dot{\vec{OP}}(t)),$$

e quindi sussiste necessariamente l'identità:

$$\mathcal{G}(\vec{OP}(t), \vec{v}(t)) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\vec{OP}(t), \dot{\vec{OP}}(t)) \stackrel{\forall t}{\equiv} 0.$$

In particolare: $\mathcal{G}(\vec{OP}_0, \vec{v}_0) \equiv D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\vec{OP}_0, \vec{v}_0) = 0$. Ma i dati (\vec{OP}_0, \vec{v}_0) sono arbitrari, il che comporta la condizione necessaria:

$$\mathcal{G}(\vec{OP}, \vec{v}) \equiv D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\vec{OP}, \vec{v}) = 0 \quad \text{per qualsiasi} \quad (\vec{OP}, \vec{v}).$$

Viceversa, se è vera quest'ultima, allora è anche $\mathcal{G}(\vec{OP}(t), \vec{v}(t)) \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$, e ciò implica la (1.5). Si conferma quindi la definizione equivalente: Integrale primo dell'equazione $m\vec{a} = \vec{f}(\vec{OP}, \vec{v})$ è una funzione scalare (non costante) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vec{OP}, \vec{v})$ che abbia derivata direzionale $D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\vec{OP}, \vec{v})$ identicamente nulla su tutto l'insieme degli stati cinetici (P, \vec{v}) compatibili con l'equazione:

$$D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(\vec{OP}, \vec{v}) \equiv \nabla_{\vec{OP}}\mathcal{F} \cdot \vec{v} + \nabla_{\vec{v}}\mathcal{F} \cdot \frac{1}{m} \vec{f}(\vec{OP}, \vec{v}) \stackrel{\forall(\vec{OP}, \vec{v})}{\equiv} 0. \quad \diamond$$

N.B. 1.10 *Se una funzione \mathcal{F} è integrale primo di un sistema $\dot{x} = v(x)$, e come tale risulta $D_v\mathcal{F} \equiv 0$, ciò sussiste in ogni sistema di coordinate (solidali fra loro).*

Si possono infatti fare le seguenti considerazioni. Si supponga che, nelle coordinate prescelte, il sistema dato sia: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, e che di esso $t \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sia la soluzione (in quelle coordinate) relativa ad un dato \mathbf{x}_0 . Per ipotesi sussiste l'identità $\mathcal{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$. Si denoti poi con $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x})$ una trasformazione di coordinate differenziabile, indipendente dal tempo, e per la quale il nuovo sistema di equazioni è $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) := \partial_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\varphi}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}$ del quale è soluzione la $t \mapsto \boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{\xi}_0) = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_0)))$. Allora è anche

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{\xi}_0))) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_0)) \quad \text{qualsiasi sia l'arbitrario} \quad \boldsymbol{\xi}_0 \in \boldsymbol{\varphi}^{-1}(D).$$

In effetti, la funzione $\tilde{\mathcal{F}} : \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathcal{F} \circ \boldsymbol{\varphi} \equiv \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))$ ha valore costante lungo ciascuna delle soluzioni dell'equazione $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})$ giacché

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bigg|_{\substack{\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\xi}}} (\mathcal{F} \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^h} v^h(\mathbf{x}) \bigg|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})} = \frac{d}{dt} \bigg|_{\substack{\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t)=\mathbf{x}}} (\mathcal{F} \circ \boldsymbol{\varphi}) \bigg|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Dunque, quando l'equazione (1.1) ammette un integrale primo \mathcal{F} sussiste il

Teorema 1.11 (di conservazione)

$$(1.6) \quad \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}_0, \vec{v}_0)$$

che è una condizione sulle variabili di stato da ritenersi valida per ogni coppia $(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$ e $(\overrightarrow{OP}_0, \vec{v}_0)$ compatibili con una qualsiasi soluzione dell'equazione di moto. Come tale essa è una equazione differenziale del primo ordine che, conseguenza dell'equazione $m\vec{a} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$, è verificata da (almeno) ciascun moto effettivo.

Esempio 1.12 Se la forza totale, o meglio se la retta (P, \vec{f}) , incide costantemente una fissata retta $r = (C, \vec{\varepsilon})$ se ne deduce la $\vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{a} \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$ che implica $\vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{v} = \text{cost}$, e questo è un altro teorema di conservazione.

Infatti: chiamata \mathcal{F} la funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) := \vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{v}$, con un procedimento analogo a quello visto nell'Esempio 1.6 si ha

$$\nabla_{\overrightarrow{OP}} \mathcal{F} \cdot \vec{v} + \nabla_{\vec{v}} \mathcal{F} \cdot \frac{1}{m} \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{m} \vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{f} = 0,$$

e quindi identicamente lungo ognuna delle soluzioni della (1.1) con una tale forza risulta $\mathcal{F}(\overrightarrow{OP}(t), \overrightarrow{OP}(t)) = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}_0, \vec{v}_0)$.

Scelto l'asse r come asse z di un sistema di coordinate cilindriche (C, ρ, θ, z) , e quindi con $\vec{\varepsilon} \equiv \vec{e}_3$, è facile ricavare (esprimendo sia \overrightarrow{CP} che \vec{v} nelle loro parti parallela e ortogonale a $\vec{\varepsilon}$, e cioè il tutto in coordinate cilindriche relative a $r = (C, \vec{\varepsilon})$) che il prodotto misto

$$\vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k}_C = \vec{\varepsilon} \cdot \rho \vec{u} \times \rho \dot{\theta} \vec{\tau} = \rho^2 \dot{\theta}$$

esprime la velocità areolare della proiezione $\overrightarrow{CP}_\perp = \rho \vec{u}$ del vettore \overrightarrow{CP} sul piano ortogonale all'asse. Per cui: *ogni moto effettivo prodotto da una tale forza avviene in modo tale che la sua proiezione sul piano ortogonale all'asse r si muove con velocità areolare costante giacché verifica l'equazione differenziale del primo ordine: $\vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{CP}_0 \times \vec{v}_0$.* \square

Esempio 1.13 Se la forza totale incide costantemente un fissato punto C si ha $\overrightarrow{CP} \times \vec{a} \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$ e quindi il moto effettivo è centrale. Come si è visto nel Cap.I, la $\vec{k}_C(t) = \overrightarrow{CP} \times \vec{v} = \vec{k}_C(t_0) =: k_C(t_0) \vec{n}$ implica $\overrightarrow{CP}(t) \cdot \vec{k}_C(t_0) = 0$ e quindi il moto avviene sul piano $\pi(C, P_0, \vec{v}_0)$, a meno che sia $\vec{k}_C(t_0) = 0$ e allora esso è rettilineo sulla retta $r(C, P_0, \vec{v}_0)$. Qualora poi il punto C fosse un punto improprio, come per esempio nel caso: $\vec{a} \times \vec{g} = 0$, si avrebbe $\vec{v} \times \vec{g} = \text{cost} = \vec{n}$ che dà $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e quindi $\overrightarrow{OP}(t) \cdot \vec{n} = \text{cost}$, oppure $\vec{v} = \lambda \vec{g}$ se $\vec{n} = 0$.

Gli stessi risultati si possono ottenere in modo equivalente. Chiamati \mathcal{F}_i , per $i = 1, 2, 3$, i momenti assiali della quantità di moto rispetto alle rette (C, \vec{e}_i) :

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) := k_i = \vec{e}_i \cdot \vec{k}_C = \vec{e}_i \cdot \overrightarrow{CP} \times m\vec{v},$$

si ha

$$\nabla_{\overrightarrow{OP}} \mathcal{F}_i \cdot \vec{v} + \nabla_{\vec{v}} \mathcal{F}_i \cdot \frac{1}{m} \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) = \vec{e}_i \cdot \vec{v} \times \vec{v} + \vec{e}_i \cdot \overrightarrow{CP} \times \vec{f} = 0,$$

e quindi, identicamente lungo ognuna delle soluzioni della (1.1) con una tale forza, risulta $\vec{k}_C(\overrightarrow{OP}(t), \overrightarrow{OP}(t)) = \vec{k}_C(\overrightarrow{OP}_0, \vec{v}_0)$. Ogni moto effettivo prodotto da una tale forza è un moto piano e centrale, e in particolare esso avviene con velocità areolare costante giacché verifica l'equazione differenziale del primo ordine:

$$\overrightarrow{CP} \times \vec{v} = \vec{k}_C(t_0), \quad \text{oppure la } \vec{v} \cdot \vec{n} = \text{cost}, \quad (\text{se } C \text{ è improprio}).$$

Ne sono importanti esempi le forze centrali: $\vec{f} = -\varphi(|\overrightarrow{CP}|) \text{ vers } \overrightarrow{CP}$, e in particolare le forze Newtoniane, le forze Coulombiane, le forze elastiche, le cui leggi sperimentali sono rispettivamente:

$$\vec{f}_N = -\frac{k_g m m_*}{CP^3} \overrightarrow{CP}, \quad \vec{f}_c = -\frac{k_c q q_*}{CP^3} \overrightarrow{CP}, \quad \vec{f}_e = -k_e \overrightarrow{CP}.$$

A queste si aggiungono, come possibile generalizzazione, le forze costanti, dirette identicamente verso un qualche punto improprio. \square

Esempio 1.14 [(continuazione dell'Esempio 1.3)] Se la forza totale dipende dalla velocità e ne condivide identicamente la direzione: $\vec{f} \times \vec{v} \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$ il moto effettivo è tale che $\vec{v} \times \vec{a} \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$. Se ne ricava $\text{vers } \vec{v} = \text{cost}$, e quindi il moto è rettilineo. Questo problema è stato già affrontato e risolto con metodi di verifica; questi indicati qui sopra sono invece del tipo risoluzione diretta e si servono della conservazione della direzione della velocità iniziale (ovvero delle tre: $\mathcal{F}_i = \vec{e}_i \cdot \vec{v}/v$).

Ne sono esempi le forze di resistenza di mezzo: $\vec{f} = -\varphi(v) \text{ vers } \vec{v}$, e in particolare le viscosi e le idrauliche, le cui leggi sperimentali, dette: S la sezione investita, $\alpha \in \mathbb{R}$ un fattore di forma, $\mu \in \mathbb{R}$ la densità del mezzo, e v_c un valore critico fissato in modo fenomenologico dalle proprietà del mezzo, sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \vec{f}_{vs} &= -\alpha S \mu v_c \vec{v} && (\text{fintanto che } v \text{ resta in un conveniente intervallo } [v_1, v_c]), \\ \vec{f}_{id} &= -\alpha S \mu v \vec{v} && (\text{quando } v \geq v_2; \text{ ed è, in generale, } v_2 \geq v_c). \end{aligned}$$

Si osservi che per poter usare lo schema di resistenza di mezzo occorre che il corpo abbia un asse di simmetria ortogonale e si muova di moto traslatorio con velocità parallela all'asse. \square

Esempio 1.15 Forze che dipendono esplicitamente dalla velocità, e che ne sono identicamente ortogonali: $\vec{f} \cdot \vec{v} \stackrel{\forall t}{\equiv} 0$, (per esempio le forze di deviazione: $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$, cfr. oltre) prendono il nome di *forze a potenza nulla*.

Con un procedimento analogo a quello visto nell'Esempio 1.6, e chiamata \mathcal{F} la funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) := \frac{1}{2} m v^2$, si ha

$$\nabla_{\overrightarrow{OP}} \mathcal{F} \cdot \vec{v} + \nabla_{\vec{v}} \mathcal{F} \cdot \frac{1}{m} \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) = m \vec{v} \cdot \frac{1}{m} \vec{f} = 0,$$

e quindi, identicamente lungo ognuna delle soluzioni della (1.1) con una tale forza, risulta $\mathcal{F}(\overrightarrow{OP}(t), \dot{\overrightarrow{OP}}(t)) = \mathcal{F}(\overrightarrow{OP}_0, \vec{v}_0)$. Ogni moto effettivo prodotto da una tale forza avviene con velocità di intensità costante giacché verifica l'equazione

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad \square$$

Si ricordino le seguenti definizioni:

Energia cinetica di un elemento := la funzione scalare, di stato,

$$\mathcal{T} : v \mapsto \mathcal{T}(\vec{v}) \equiv \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \frac{1}{2} m v^2.$$

Energia cinetica di un elemento, in un istante durante un assegnato moto := la funzione scalare, composta per il tramite del moto,

$$\mathcal{T} : t \mapsto \mathcal{T}(t) \equiv \frac{1}{2} m \dot{\overrightarrow{OP}}(t) \cdot \dot{\overrightarrow{OP}}(t) \equiv \frac{1}{2} m v^2(t).$$

Potenza di una forza := la funzione scalare, di stato,

$$\mathcal{W} : (\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) \mapsto \mathcal{W}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) := \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) \cdot \vec{v}.$$

Potenza di una forza, in un istante durante un assegnato moto := la funzione scalare, composta per il tramite del moto,

$$\mathcal{W} : t \mapsto \mathcal{W}(t) := \vec{f}(\overrightarrow{OP}(t), \dot{\overrightarrow{OP}}(t), t) \cdot \dot{\overrightarrow{OP}}(t).$$

Lavoro elementare di una forza := la forma differenziale lineare rispetto a un $d\overrightarrow{OP}$ arbitrario, o “nominale”, data da

$$(1.7) \quad d\mathcal{L} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t) \cdot d\overrightarrow{OP}.$$

Lavoro di una forza durante un assegnato moto := la funzione scalare, integrale di linea del lavoro elementare *lungo il dato moto*, e quindi l'integrale rispetto al tempo della potenza $\mathcal{W}(t)$ durante il dato moto,

$$(1.8) \quad (t_0, t) \mapsto \mathcal{L}_{t_0, t} := \int_{t_0}^t \mathcal{W}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \vec{f}(\overrightarrow{OP}(\tau), \dot{\overrightarrow{OP}}(\tau), \tau) \cdot \dot{\overrightarrow{OP}}(\tau) d\tau.$$

N.B. 1.16 Diversamente dall'Energia Cinetica, che è una “funzione di stato” nel senso che è direttamente esprimibile come funzione delle sole variabili di stato dell'elemento, un'analogia definizione per il lavoro di una forza non è in generale possibile giacché per calcolare l'integrale (1.8): $\int_{t_0}^t \mathcal{W}(\tau) d\tau$ occorre conoscere *esplicitamente* entrambe le funzioni incognite $\overrightarrow{OP}(\tau)$ e $\dot{\overrightarrow{OP}}(\tau)$.

Inoltre, per definire ed eventualmente calcolare (la potenza ed) il lavoro di una certa forza durante un certo moto, il moto in questione *può anche essere*

qualsiasi: non deve necessariamente essere un moto effettivo, e cioè una soluzione dell'equazione del moto (1.1) *con quella forza*, esso deve solo essere fissato e noto. In altre parole, il lavoro (1.8) ha carattere *nominale*, nel senso che il moto lungo il quale esso viene calcolato è arbitrario e non necessariamente effettivo. Allo stesso modo, ha sempre carattere nominale il lavoro elementare di una forza in quanto il differenziale $d\overline{OP}$ è arbitrario. \diamond

Malgrado sussista l'affermazione fatta nel precedente N.B. 1.16, il caso delle forze a potenza nulla ne è però un'eccezione, e quanto si è fatto nell'Esempio 1.15 può anzi essere riproposto come segue, e ulteriormente esteso nel seguito.

Si supponga che una forza a potenza nulla sia la totale responsabile di un certo moto effettivo, e si moltiplichino scalarmente ambo i membri dell'Equazione (1.1) calcolata durante quel moto per la corrispondente velocità $\vec{v}(t)$ (supposta non nulla); si ottiene la

$$m \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = \mathcal{W}(t) \quad \text{e quindi la:} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(t) \right) = \mathcal{W}(t) = 0.$$

Nel particolare caso in esame è possibile integrare ambo i membri rispetto al tempo e riconoscere che questa identità proviene da una relazione differenziale che si può scrivere *in questo caso anche senza conoscere il moto*. Infatti qui l'integrale (1.8) vale zero, *qualunque sia il moto*. Come risultato si ottiene ovviamente (come già nell'Esempio 1.15) il teorema di conservazione $v^2 = \text{cost}$ valido lungo qualsiasi moto soluzione della (1.1).

Sfortunatamente, e come rimarcato nel N.B. 1.16, se la forza agente è qualsiasi tale procedimento generalmente non si può ripetere. In generale infatti non è possibile determinare l'integrale (1.8), e cioè il Lavoro compiuto da una forza durante un moto, *a meno che siano esplicitamente note non solo la legge della forza ma anche il particolare moto* $t \mapsto \overline{OP}(t)$ *in esame*. Ciò perché per valutare l'integrale (1.8) occorre conoscere oltre alla forza agente, ai particolari dati iniziali, e agli istanti iniziale e attuale, anche la traiettoria e l'equazione oraria. Infatti, a causa della presenza di \vec{v} e di t nella legge della forza, in generale l'integrale della forma differenziale (1.7) si può valutare solo se la "linea" lungo la quale si integra è parametrizzata proprio mediante il parametro t , e cioè se è noto il moto. Il risultato dell'integrale dipende direttamente dal moto e muta al variare di esso, e il procedimento non può fornire alcun teorema di conservazione.

Inoltre, se la potenza $\mathcal{W}(t)$ di una forza viene calcolata durante un (qualsiasi) moto nominale essa *non è, né uguaglia*, in generale la derivata totale, fatta rispetto al tempo e per il tramite del moto, di alcuna funzione dello stato cinetico $(\overline{OP}, \vec{v}, t)$. Viceversa, il ragionamento fatto sopra mostra che sussiste la seguente

Proposizione 1.17 *Qualora il moto che si usa per calcolare la potenza $\mathcal{W}(t)$ di una forza non sia qualsiasi ma sia un moto effettivo prodotto da quella (sola) forza, e come tale sia soluzione della (1.1) con la data forza, la potenza $\mathcal{W}(t)$ calcolata con tale moto non è, ma uguaglia identicamente la derivata rispetto al tempo della (funzione composta) energia cinetica durante quel moto.* \square

Dimostrazione Si consideri, dapprima, un certo (qualsiasi) moto $t \mapsto \overrightarrow{OP}(t)$. In ciascun istante t durante tale moto, sussiste l'uguaglianza

$$m \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = m \ddot{\overrightarrow{OP}}(t) \cdot \dot{\overrightarrow{OP}}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{T}(t) .$$

Se allora, come già osservato nell'Esempio 1.15, il moto $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(t)$ è effettivo, e come tale è soluzione dell'equazione (1.1) con una certa forza: $\vec{f} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t)$, lungo quel moto sussiste l'identità $m \vec{a}(t) = \vec{f}(\overrightarrow{OP}(t), \dot{\overrightarrow{OP}}(t), t)$. Ne segue l'identità

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{T}(t) = \mathcal{W}(t) .$$

Solo così potenza ed energia cinetica rimangono correlate, e non lo sono, in generale, quali funzioni di stato. ■

Integrando formalmente la (1.9) *rispetto al tempo* si ricava il

Teorema 1.18 (del Lavoro) *Durante un moto effettivo, il lavoro compiuto fra due arbitrari istanti (t_0, t) dalla forza totale agente sull'elemento uguaglia la differenza fra i valori assunti dall'energia cinetica relativa a quel moto e quegli istanti.*

$$(1.10) \quad \frac{1}{2} m v^2(t) - \frac{1}{2} m v^2(t_0) = \mathcal{L}_{t_0, t} .$$

N.B. 1.19 Si è già osservato che il processo di integrazione che permette di scrivere la (1.10) è possibile solo a posteriori della conoscenza del moto giacché, per calcolare il lavoro di una forza, è in generale indispensabile conoscere esplicitamente non solo la forza ma anche il particolare moto. Pertanto quando il moto non si conosce a priori, e anzi il problema è quello di determinarlo, il teorema del lavoro – e cioè la (1.10) – può dare un contributo solo parziale visto che per conoscere il secondo membro della (1.10) occorre già conoscere la soluzione del problema. In altre parole, l'equazione (1.10) non stabilisce in generale alcuna relazione fra le variabili di stato del sistema che sia identicamente verificata dai moti effettivi, né può essere usata a priori dalla conoscenza del particolare moto, e ciò *generalmente rende la (1.10) e la (1.9) di scarsa utilità ai fini della determinazione del moto stesso*

D'altra parte il Teorema del Lavoro è verificato da una qualsiasi quiete, *anche se questa non è dinamicamente possibile*, e cioè compatibile con la (1.1). ◇

Come si è ripetutamente osservato, per calcolare il lavoro di una forza, è in generale indispensabile conoscere esplicitamente non solo la forza ma anche il particolare moto. Vi sono tuttavia forze per le quali ciò non accade, e *il cui lavoro si può calcolare a prescindere da quale sia il particolare moto*. In tal caso il teorema (1.10) risulta di grande utilità giacché dalla (1.10) si ricava un teorema di conservazione.

Un primo esempio è quello delle forze che (si veda l'Esempio 1.15) avendo potenza identicamente nulla hanno anche identicamente nullo il lavoro. Per esse si è provato che: *ogni moto effettivo prodotto da una forza (totale) a potenza nulla*

avviene con Energia cinetica costante giacché verifica l'equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{costante} .$$

N.B. 1.20 In realtà, non è del tutto corretto chiamare quella qui sopra “equazione differenziale del primo ordine”. Infatti, certamente del primo ordine, essa non è un'equazione differenziale ma ben più di una. A seconda di quali siano le variabili note, infatti, essa può dar luogo a sei equazioni distinte. Essa è comunque una relazione identicamente verificata dalle variabili di stato e le loro derivate prime durante un qualsiasi moto effettivo. \diamond

N.B. 1.21 L'annullarsi identico *per ogni* t della potenza $\mathcal{W}(t)$ è condizione anche necessaria (oltre che sufficiente) affinché sia nullo il lavoro $\mathcal{L}_{t_0,t}$ *per ogni* t . Inoltre, affinché una forza \vec{f} possa dirsi a potenza nulla, essa deve necessariamente dipendere dalla (direzione della) velocità ed essergli ortogonale. Una tale forza avrà quindi potenza nulla *qualsiasi sia il moto considerato*: nominale o effettivo. \diamond

Facendo riferimento a tali considerazioni si può in particolare concludere che: assegnata una certa forza totale \vec{f} , la differenza di energia cinetica relativa a due istanti di un moto effettivo uguaglia non solo il lavoro della forza, ma anche quello compiuto *durante quello stesso moto* da una qualsiasi altra forza ottenuta sommando a essa un'arbitrario addendo a potenza nulla. Ai fini del solo calcolo del lavoro è come se il moto fosse stato prodotto dalla sola parte della forza che ha potenza non nulla.

Si badi bene che *l'aggiunta di una forza a potenza nulla nell'equazione fondamentale* $m\vec{a} = \vec{f}$ *in generale modifica il moto*. Quello che qui si è affermato è solo che, assegnato un particolare moto, il lavoro compiuto dalla forza che lo genera, e la differenza di energia cinetica, sono i medesimi di quelli calcolati come se *quello stesso moto* fosse stato prodotto da un'altra forza, diversa da quella data per un arbitrario addendo a potenza nulla o: “non dissipativo”.

Esempio 1.22 [(continuazione dell'Esempio 1.15)] Si vuole ora estendere il procedimento seguito nell'Esempio 1.15 per il caso delle forze a potenza nulla. Lo si farà come segue. \square

Sia (O, x, y, z) una fissata, arbitraria, terna di riferimento. Si definiscono

Forze posizionali := quelle forze nella cui legge sperimentale compare (al più) il vettore di posizione \overrightarrow{OP} :

$$\vec{f} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}) .$$

Esse sono quindi quelle forze che hanno come componenti sugli assi funzioni al più delle coordinate x, y, z dell'elemento sul quale la forza agisce.

Anche per le forze posizionali, sebbene non si può in generale dare al secondo membro del teorema del lavoro (1.10) una forma semplice quale quella del primo membro, giacché non si può in generale esprimere il prodotto $\vec{f}(\vec{OP}) \cdot \vec{v} dt$ come il differenziale (totale) di una qualche funzione di stato. È tuttavia possibile trarre vantaggio dal fatto che il lavoro elementare $d\mathcal{L}$ di una forza posizionale è una forma differenziale $\vec{f}(\vec{OP}) \cdot d\vec{OP}$ delle sole variabili di posizione, come si calcola subito servendosi dell'espressione $\vec{OP} dt = (\dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3)dt$:

$$d\mathcal{L} = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz = \vec{f}(\vec{OP}) \cdot d\vec{OP}.$$

Si riconosce così che sussiste la seguente

Proposizione 1.23 *Per calcolare il lavoro compiuto da una forza posizionale durante un (qualsiasi) moto è sufficiente conoscere la sola traiettoria da esso percorsa e non anche l'equazione oraria con la quale la traiettoria stessa viene descritta. Il lavoro compiuto da una tale forza lungo un arco regolare semplice γ uguaglia la differenza dei valori che una funzione regolare \mathcal{V}_γ dell'ascissa curvilinea di γ assume in corrispondenza ai punti iniziale e attuale.* \square

Dimostrazione Sia $\vec{OP} = \vec{OP}(\tau)$ una qualsiasi espressione parametrica nota dell'arco regolare semplice γ della traiettoria percorsa dall'elemento, e sia $\vec{OP} = \vec{OP}(t)$, con $\vec{OP}_0 := \vec{OP}(t_0)$, il moto (incognito) lungo il quale calcolare la (1.8). Nell'ipotesi che l'arco γ venga percorso senza istanti di arresto si indichi con $\tau = \tau(t)$ l'incognita legge oraria a esso corrispondente, e con $t = t(\tau)$ la sua inversa (locale). Il differenziale $\mathcal{W}(t)dt = \vec{f}(\vec{OP}(t)) \cdot \vec{OP}(t)dt$ resta espresso in funzione del solo parametro τ , per il tramite della funzione (nota) $\vec{OP} = \vec{OP}(\tau)$, dalla $\mathcal{W}(\tau)d\tau = \vec{f}(\vec{OP}(\tau)) \cdot (d\vec{OP}(\tau)/d\tau)d\tau$. [L'essere la forza posizionale assicura che in questa espressione non vi sia traccia della funzione (incognita) $t = t(\tau)$ che, invece, vi sarebbe se nella legge della forza apparissero anche la velocità \vec{v} o il tempo t].

Pertanto, per calcolare il lavoro di una forza posizionale si può fare ricorso al teorema di integrazione per sostituzione di variabile, e cioè alla definizione stessa di integrale della forma differenziale lineare $\vec{f}(\vec{OP}) \cdot d\vec{OP}$, e concludere che *l'integrale della forma differenziale che esprime il lavoro elementare di una forza posizionale lungo un arco di traiettoria γ noto e regolare non muta anche se la curva γ viene espressa mediante una parametrizzazione diversa da quella (incognita) del moto.*

Così, il lavoro della forza posizionale lungo un arco γ , semplice, regolare, congiungente punti P_0 e P tali che $\vec{OP}_0 = \vec{OP}(t_0) = \vec{OP}(\tau_0)$ e $\vec{OP} = \vec{OP}(t) = \vec{OP}(\tau)$, resta valutato dall'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t_0, t} &= \int_{t_0}^t \mathcal{W}(t)dt \equiv \mathcal{L}_{P_0, P} = \int_{\gamma} \vec{f}(\vec{OP}) \cdot d\vec{OP} \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{f}(\vec{OP}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{OP}}{d\tau}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left(f_x \frac{dx}{d\tau} + f_y \frac{dy}{d\tau} + f_z \frac{dz}{d\tau} \right) (\tau) d\tau, \end{aligned}$$

nella quale si è supposta esistere *ma senza che sia nota* la citata relazione $\tau = \tau(t)$ fra i parametri t e τ . Pertanto: il lavoro compiuto da una forza posizionale durante un *qualsiasi* moto che avvenga (senza istanti di arresto) lungo una fissata traiettoria γ *non dipende dall'equazione oraria* $\tau = \tau(t)$ con la quale la curva γ è percorsa. Esso certo *dipende dalla traiettoria* γ , ma solo per il tramite del particolare arco percorso e non per la sua parametrizzazione. Un buon parametro τ nel calcolo dell'integrale di linea qui sopra è allora l'ascissa curvilinea s .

In definitiva, detta $\mathcal{V}_\gamma = \mathcal{V}_\gamma(s)$ l'opposto di una funzione primitiva della $f_T(s)$, e cioè posto

$$- \mathcal{V}_\gamma(s) := \int^s f_T(s') ds' ,$$

si è provato che il lavoro fatto da una forza posizionale lungo un arco γ di traiettoria, noto semplice e regolare di estremi P_0 e P , è espresso dalla

$$\mathcal{L}_{P_0, P} = \mathcal{V}_\gamma(s_0) - \mathcal{V}_\gamma(s) , \quad \text{con} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OP} , \\ \overrightarrow{OP}(s_0) = \overrightarrow{OP_0} . \end{cases} \quad \blacksquare$$

Importante applicazione di tale Proposizione è la seguente. Si consideri un problema di moto nel quale la forza è posizionale, e per il quale *la traiettoria dell'elemento si conosce a priori*. Si consideri anzi, più in generale, il caso di una forza “ γ -posizionale”, e cioè una forza ottenuta aggiungendo a una posizionale un'arbitraria forza a potenza nulla (entrambe queste proprietà supposte vere anche solo sulla curva γ) e quindi una forza totale che calcolata su γ abbia *componente* f_T *tangente alla curva* γ *nota in funzione della (sola) posizione sulla curva*. Per quanto si è detto, il lavoro compiuto da forze di tale genere durante un qualsiasi moto che avvenga lungo γ può essere agevolmente calcolato facendo uso del semplice integrale

$$\mathcal{L}_{P_0, P} \equiv \mathcal{L}_{s_0, s} = \int_{s_0}^s f_T(s') ds' .$$

Questo permette di concludere che: quando l'arco di traiettoria γ è noto a priori, e (magari solo su quella traiettoria) la forza totale è posizionale o differente da una posizionale per l'aggiunta di un termine a potenza nulla, in ciascun istante durante un moto effettivo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(s(t))$ che sia prodotto da quella forza e che percorra quell'arco senza istanti di arresto, tra lo stato cinetico (s_0, \dot{s}_0) e lo stato (s, \dot{s}) , entrambi arbitrari purché scelti su tale moto effettivo, sussiste la relazione necessaria:

$$(1.11) \quad \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m \dot{s}_0^2 = \int_{s_0}^s f_T(s') ds' =: \mathcal{V}_\gamma(s_0) - \mathcal{V}_\gamma(s) .$$

Introdotta la funzione \mathcal{F}_γ data da

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\gamma(s, \dot{s}) &:= \frac{1}{2} m v^2 - \int_\gamma \vec{f}(\overrightarrow{OP}(s)) \cdot \vec{T}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \mathcal{V}_\gamma(s) , \end{aligned}$$

e ancora servendosi della $\ddot{s} = \vec{T} \cdot \vec{a} = f_T(\overrightarrow{OP}(s)) = f_T(s)$ si ottiene

$$\dot{s} \frac{\partial \mathcal{F}_\gamma}{\partial s} + \frac{1}{m} f_T(s) \frac{\partial \mathcal{F}_\gamma}{\partial \dot{s}} = -\dot{s} f_T(s) + \frac{1}{m} f_T(s) m \dot{s} = 0,$$

e quindi lungo ognuna delle soluzioni della (1.1) che descrivono la data traiettoria γ e qualunque sia l'equazione oraria $s = s(t)$ con la quale ciò accade, sussiste il teorema di conservazione

$$\mathcal{F}_\gamma(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \mathcal{V}_\gamma(s) = \mathcal{F}_\gamma(s_0, \dot{s}_0).$$

In conclusione: se il moto dell'elemento avviene *lungo una traiettoria γ nota a priori*, e se la forza totale che agisce sull'elemento e che produce tale moto è *la somma di una posizionale e di una a potenza nulla* (anche se entrambe le condizioni fossero valide solo sulla linea γ), allora *ogni moto effettivo prodotto da una tale forza e che descrive (senza istanti di arresto) la traiettoria γ verifica l'equazione differenziale del primo ordine:*

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \int^s f_T(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} m \dot{s}_0^2 - \int^{s_0} f_T(\sigma) d\sigma.$$

Contrariamente alla (1.10), quest'ultima dà un notevole contributo alla risoluzione del problema del moto, sempre a patto che sussistano le ipotesi dette. Infatti la (1.11) è un'equazione differenziale nella funzione scalare $s = s(t)$ unica incognita rimasta del problema. Inoltre essa è un'equazione autonoma del primo ordine, e ciò ne permette almeno in linea di principio la risoluzione esplicita o, almeno, un'utile ed esauriente discussione qualitativa.

Si osservi anche che la (1.11) è una diretta conseguenza della proiezione dell'equazione di Newton lungo la tangente alla traiettoria, ma non ne è equivalente neanche per i soli moti lungo quella traiettoria; la (1.11) infatti ammette come soluzioni di equilibrio tutti i punti della traiettoria: ogni moto per il quale $s = s_0$ è identicamente uguale a s_0 rende nulli ambo i membri della (1.11). Le effettive posizioni di equilibrio vanno determinate, a partire dalla corrispondente equazione del secondo ordine, servendosi della conveniente equazione della statica: $f_T(s) = 0$. Inoltre, la discussione della (1.11) va effettuata separatamente su ogni arco agli estremi del quale vi siano eventuali *istanti di arresto*, e cioè istanti t^* tali che $\dot{s}(t^*) = 0$.

Quanto visto fin qui si generalizza ulteriormente nel seguente esempio. In esso si tratta di una categoria di forze di enorme importanza e che comprende alcune di quelle viste qui sopra. Tali forze, pur non dando luogo a una specifica classe di moti, permettono tuttavia di discuterne a priori alcune delle loro principali caratteristiche qualitative. L'utilità del metodo è tale che spesso, pur di ricorrevi, si è disposti a supporre vere in modo completo proprietà che per motivi fisici possono talvolta sembrare, o sono senz'altro, inaccettabili.

Le forze conservative

Sia $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme aperto connesso del sistema di riferimento.

Una forza (posizionale) definita su \mathbb{D} si dice conservativa quando esiste una funzione scalare $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z)$, definita su \mathbb{D} e ivi di classe \mathcal{C}^1 , che abbia derivate parziali prime rispetto alle x, y, z rispettivamente uguali alle componenti omologhe della forza cambiate di segno

$$\begin{cases} -f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{V}(x, y, z) \\ -f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{V}(x, y, z) \\ -f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{V}(x, y, z), \end{cases}$$

o, più brevemente,

$$-\vec{f}(x, y, z) = \nabla \mathcal{V}(x, y, z) \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{D}.$$

A tale funzione $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z)$ viene dato il nome di *Energia potenziale*; e talvolta di “potenziale” al suo opposto $\mathcal{U}(x, y, z) := -\mathcal{V}(x, y, z)$.

N.B. 1.24 Il tutto sussiste in un certo, fissato, riferimento e non si conserva al cambio del riferimento (o di coordinate) a meno che la trasformazione sia indipendente dal tempo, nel qual caso vale quanto visto nel N.B. 1.10. \diamond

N.B. 1.25 Se $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z)$ è un’energia potenziale per una forza $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ e se c è una qualsiasi costante reale, allora anche $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{V}}(x, y, z) := \mathcal{V}(x, y, z) + c$ è un’energia potenziale per la stessa forza, e cioè: *se una forza è conservativa essa ammette un’intera famiglia di funzioni energia potenziale, tutte ottenibili l’una dall’altra per l’aggiunta di una costante e tutte equivalenti ai fini della discussione dei moti.* Il valore di tale costante può sempre essere scelto arbitrariamente e non muta la discussione. Si badi bene a non confondere il valore di tale costante c con quello individuato dalle condizioni iniziali di un certo moto: $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}(x_0, y_0, z_0) + c$; questo, come si vede, è noto *a posteriori della c*. \diamond

Se una forza è conservativa la sua potenza $\mathcal{W} = \mathcal{W}(t)$ durante un arbitrario (fissato) moto, anche se non effettivo o generato esclusivamente da essa, è la derivata totale rispetto al tempo della funzione $-\mathcal{V}(t) := -\mathcal{V}(x(t), y(t), z(t))$ composta della funzione $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z)$ per il tramite del dato moto $\vec{OP} = \vec{OP}(t)$

$$\vec{f} \text{ conservativa} \quad \implies \quad \mathcal{W}(t) = -\frac{d}{dt} \mathcal{V}(\vec{OP}(t)).$$

È chiaro che ciò non accade alla potenza di una forza qualsiasi, che generalmente non è la derivata totale di alcuna funzione composta per il tramite del moto.

Nel caso di forze conservative è possibile calcolare a priori il lavoro da esse compiuto durante il moto (qualunque sia il moto, nominale, privo di istanti di arresto, anche non prodotto unicamente da esse) purché siano note le posizioni P_0 e P relative agli istanti t_0 e t durante quel moto.

Infatti, per valutare il lavoro compiuto da una forza conservativa durante un qualsiasi moto tale che $\overrightarrow{OP}_0 = \overrightarrow{OP}(t_0)$ e $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(t)$, e cioè per integrare la potenza durante quel moto, non occorre conoscere nulla del moto stesso salvo che gli estremi dell'arco di traiettoria da esso descritta. Ciò perché sussiste la

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{t_0,t} &= \int_{t_0}^t \mathcal{W}(\tau) d\tau = - \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}(\tau)) d\tau \\ &= \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}_0) - \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}) = \mathcal{L}_{P_0,P} . \end{aligned}$$

Conseguenza importante Il fatto che il risultato dell'integrale nella (1.12) dipenda dal moto solo per il tramite dei punti P_0 e P mostra che *il lavoro di una forza conservativa non dipende né dalla traiettoria né dall'equazione oraria, ma solo dai punti P_0 e P sul percorso.*

Memento 1.26 Una forma differenziale lineare, definita su un aperto connesso $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$, si dice esatta quando esiste una funzione \mathcal{U} il cui differenziale totale uguaglia in \mathbb{D} la forma data. \square

N.B. 1.27 Se una forza definita su un aperto connesso $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ è conservativa, il suo lavoro elementare è una forma differenziale esatta in \mathbb{D} :

$$d\mathcal{L} = \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \cdot d\overrightarrow{OP} = - d\mathcal{V}(\overrightarrow{OP}) = d\mathcal{U}(\overrightarrow{OP}) .$$

Equivalentemente: se una forza è conservativa su \mathbb{D} , dato un qualsiasi cammino semplice $\gamma = \gamma(\tau) \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(\tau) \subset \mathbb{D}$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, con $|d\overrightarrow{OP}/d\tau| \neq 0$, che unisca due (arbitrari) punti P_1, P_2 in \mathbb{D} , con $\overrightarrow{OP}(\tau_1) = \overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}(\tau_2) = \overrightarrow{OP}_2$, si ha:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \cdot d\overrightarrow{OP} &\equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(f_x \frac{dx}{d\tau} + f_y \frac{dy}{d\tau} + f_z \frac{dz}{d\tau} \right) (\tau) d\tau \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left(\mathcal{V}(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \right) d\tau \\ &= \mathcal{V}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{V}(x_2, y_2, z_2) . \end{aligned}$$

Tale integrale è indipendente dalla scelta di γ purché questa congiunga i due, peraltro arbitrari, punti $\overrightarrow{OP}_1 = \overrightarrow{OP}(\tau_1)$ e $\overrightarrow{OP}_2 = \overrightarrow{OP}(\tau_2)$.

Equivalentemente: se una forza è conservativa su \mathbb{D} , lungo ogni cammino semplice e chiuso $\gamma_0 \subset \mathbb{D}$, e indicato con T il periodo del ciclo γ_0 , risulta

$$\int_{\gamma_0} \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \cdot d\overrightarrow{OP} \equiv \int_{\tau}^{\tau+T} \vec{f}(\overrightarrow{OP}(\sigma)) \cdot \overrightarrow{OP}'(\sigma) d\sigma \equiv 0 .$$

Si osservi che per il verificarsi di tali relazioni la condizione di forza conservativa è certo sufficiente, *ma non necessaria*: si veda il N.B. 1.28 qui di seguito. \diamond

N.B. 1.28 Anche per le forze conservative è lecito ripetere l'osservazione fatta circa il calcolo esplicito del lavoro compiuto da una forza quando a essa se ne aggiunga una arbitraria avente potenza nulla. \diamond

Forze sostanzialmente conservative := forze ottenute aggiungendo a una forza conservativa (o, pleonastico, *strettamente* conservativa) un arbitrario termine a potenza nulla.

Quando una forza è sostanzialmente conservativa resta possibile calcolare a priori il lavoro da essa compiuto durante un qualsiasi moto che abbia assegnati estremi, e ciò anche senza conoscere esplicitamente tale moto. Assegnata la coppia delle posizioni considerate sue estreme ma per il resto arbitrarie, per esempio la posizione iniziale e la posizione attuale, tale lavoro è solo quello che proviene dalla parte strettamente conservativa della forza e uguaglia la differenza di energia potenziale calcolata in esse.

Le precedenti osservazioni sono quelle che rendono così importanti le forze conservative. Sia data una forza sostanzialmente conservativa. Da quanto si è appena visto, anche durante il moto effettivo, che unisce $\overrightarrow{OP}(t_0) = \overrightarrow{OP}_0$ con $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP}$, si ha

$$\mathcal{V}(x_0, y_0, z_0) - \mathcal{V}(x, y, z) = \mathcal{L}_{P_0, P} \equiv \mathcal{L}_{t_0, t} ;$$

d'altra parte, se quella forza è la totale responsabile del moto, il teorema del lavoro afferma che durante tale moto sussiste l'identità

$$(1.14) \quad \frac{1}{2} mv^2(t) - \frac{1}{2} mv^2(t_0) = \mathcal{L}_{t_0, t} .$$

Ne segue che: se la forza totale responsabile del moto di un elemento è sostanzialmente conservativa, e detti (P_0, \vec{v}_0) lo stato cinetico dell'elemento all'istante t_0 e (P, \vec{v}) quello all'istante t , qualunque sia il moto effettivo, qualunque sia l'addendo a potenza nulla nella forza, e qualunque siano gli istanti t_0 e t , durante quel moto sussiste fra le variabili di stato la relazione:

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}_0 \equiv \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}) - \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}_0)$$

ove $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\overrightarrow{OP})$ è una qualunque delle energie potenziali (per una qualche scelta della costante additiva c) della sola parte strettamente conservativa della forza. Introdotta la

Energia meccanica dell'elemento := la funzione di stato $\mathcal{E} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) := \mathcal{T}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + \mathcal{V}(x, y, z) ,$$

la relazione vista sopra viene anche detta

più approfondito esame del come variano le f^v in corrispondenza a $v \sim 0$ porta a concludere che: nel caso della detta non univocità della soluzione del moto, fra la quiete e la non-quiete è la prima delle due soluzioni a essere quella che effettivamente rappresenta il corretto moto.

■ 2.2 Problemi di dinamica dell'elemento

Esercizio 2.1 Discutere il moto dell'oscillatore armonico libero:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \ddot{\vec{OP}} = -\frac{k}{m} \vec{OP}, & k > 0, \\ \vec{OP}(t_0) = \vec{OP}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0. \end{cases}$$

iniziando dal caso particolare \vec{OP}_0 parallelo a \vec{v}_0 .

N.B. 2.2 Si osservi che tale problema è solo apparentemente più semplice di quello, di maggior interesse fisico, di un elemento materiale soggetto oltre che a una forza elastica $-k\vec{CP}$ di assegnato centro C anche alla forza peso $m\vec{g}$. Per convincersene, si adotti il seguente procedimento. Si chiami O' l'origine del sistema di riferimento. Si cerca la soluzione del problema:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \ddot{\vec{O'P}} = -\frac{k}{m} \vec{CP} + \vec{g} \\ \vec{O'P}(t_0) = \vec{O'P}_0, \quad \dot{\vec{O'P}}(t_0) = \vec{v}_0. \end{cases}$$

Tuttavia si nota che, scelto in modo del tutto arbitrario un punto (fisso) O , si ha identicamente $\vec{O'P}(t) \equiv \vec{OP}(t)$ ed $\ddot{\vec{O'P}}(t) \equiv \ddot{\vec{OP}}(t)$. Pertanto, posto $\vec{CP} = \vec{CO} + \vec{OP}$, e usando come nuova origine il punto O , il problema si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} \ddot{\vec{OP}} = -\frac{k}{m} \vec{CO} - \frac{k}{m} \vec{OP} + \vec{g} \\ \vec{OP}(t_0) = \vec{OP}_0, \quad \dot{\vec{OP}}(t_0) = \vec{v}_0. \end{cases}$$

Se, allora il punto O viene fissato in modo tale che risulti $-k\vec{CO} + m\vec{g} = 0$, e cioè se esso coincide con il punto di equilibrio dell'elemento, è immediato verificare che il problema (2.2) si riconduce al problema (2.1). \diamond

Non lede la generalità assumere che sia $t_0 = 0$. Date le specifiche condizioni iniziali, si scelga l'asse delle x in modo tale che $\vec{OP}_0 = x_0\vec{e}_1$ e $\vec{v}_0 = \dot{x}_0\vec{e}_1$.

Come si è detto, è un procedimento di natura del tutto generale sfruttare l'esistenza e unicità della soluzione del problema cercandola sotto una speciale forma,

intuita a partire dal particolare caso in esame, e cioè dalle particolari forze e condizioni iniziali assegnate. Nel problema presente, ciò porta ad ipotizzare la soluzione sotto la forma $\overrightarrow{OP}(t) = x(t; x_0, \dot{x}_0)\vec{e}_1$, ove la $x = x(t; x_0, \dot{x}_0)$ è la soluzione – esistente e unica – del problema ridotto

$$(2.3) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{k}{m} x \\ x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 . \end{cases}$$

D'altra parte, l'equazione $\ddot{y} = -(k/m)y$ con $y_0 = \dot{y}_0 = 0$ ammette soluzione, unica, $y(t) = 0$, ed analogo risultato si ha per la z . Pertanto, alternativamente, si può proiettare l'equazione sugli assi e riconoscere che le prime due conseguenze scalari dell'equazione di moto hanno, per questi dati iniziali, soluzioni identicamente nulle.

N.B. 2.3 Molte delle proprietà alle quali si accennerà qui di seguito (ad esempio quelle enunciate nel Punto 3) sono proprietà generali, che sussistono per un qualsiasi sistema *bidimensionale* conservativo $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}(\mathbf{u})$, con $\mathbf{u} = (x, y)$, che ammetta integrale primo non banale $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$, e cioè per il quale

$$D_{\mathbf{w}}\mathcal{F}(x, y) \equiv w_x(x, y) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + w_y(x, y) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0 .$$

Altre, invece, sussistono solo per il caso ben specifico di un sistema meccanico scalare posizionale, e cioè per il quale $\mathbf{w}(\mathbf{u}) \equiv (y, f_x(x)/m)$, e l'integrale primo ha la particolare forma $\mathcal{T} + \mathcal{V}$ con \mathcal{T} funzione quadratica e definita positiva della \dot{x} , e con \mathcal{V} tale che $d\mathcal{V}/dx = 0$ individua i punti di equilibrio del sistema. Altre ancora sono valide solo per l'oscillatore lineare del caso in esame.

Tuttavia, è proprio a causa di tali semplificazioni che lo studio dei possibili “diagrammi di fase” viene iniziato a partire da quest'ultimo tipo di sistema, ed è solo in un secondo momento (si veda la fine di questo capitolo) che tale studio può essere vantaggiosamente esteso e ulteriormente dettagliato. Qui di seguito ci si servirà dell'oscillatore lineare come esempio della discussione di un caso meccanico. \diamond

La (2.3) ammette il teorema di conservazione

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2 =: \mathcal{E}_0 ; \quad \text{ovvero}$$

$$\mathcal{E}(x, \dot{x}) := \mathcal{T}(\dot{x}) + \mathcal{V}(x) = \mathcal{E}_0 .$$

Ciò implica in particolare che ogni singolo stato (x, \dot{x}) di un qualsiasi moto effettivo $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ è tale che

$$\dot{x} = \dot{x}(x) := \pm \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}$$

giacché, dovendo mantenere costante la $\mathcal{E}(x, \dot{x})$, ciascun singolo stato deve necessariamente appartenere a una delle linee di livello *della famiglia ad un parametro*:

$$\gamma_{\mathcal{E}_0} := \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0 \right\} .$$

Si badi a non confondere tali curve, *definite sul piano delle fasi* $\pi_f := \{(x, \dot{x})\}_{x, \dot{x} \in \mathbb{R}}$ e che in questo caso consistono in una famiglia di ellissi indiciate dal parametro \mathcal{E}_0 , con linee o superfici equipotenziali definite nello spazio fisico, e che in questo esempio sono solo le $kx^2/2 = \text{cost}$ e quindi i piani $x = \text{cost}$, né con le traiettorie, anch'esse definite nello spazio fisico e che in questo caso sono segmenti dell'asse delle x .

Le precedenti considerazioni sono un rapido e specifico riassunto dei seguenti fatti, relativi a un sistema $\ddot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^1$.

- (1) I punti critici x_c della funzione $\mathcal{V}(x) := -\int^x f(\xi)d\xi$ coincidono con le posizioni di equilibrio del sistema; essi infatti sono gli zeri della funzione $f_x = -d\mathcal{V}/dx$, restrizione all'asse delle x del vettore $\mathbf{f} = -\nabla\mathcal{V}$. In questo caso particolare, la funzione $\mathcal{V} = kx^2/2$ ammette l'origine come unico punto critico, che risulta un punto di minimo (relativo) della funzione \mathcal{V} .
- (2) Giacché il primo addendo della $\mathcal{E} := \mathcal{T} + \mathcal{V} = (m\dot{x}^2 + kx^2)/2$ è essenzialmente positivo, *localmente* le linee di livello $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ sono definite solo se $\mathcal{E}_0 \geq \mathcal{V}(x_m)$, ove si è chiamato x_m un punto di minimo (locale) della funzione $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x)$. In questo esempio, e con la scelta $\mathcal{V}(0) = 0$, non può che essere $\mathcal{E}_0 \geq 0$.
- (3) La regolarità del sistema garantisce che la soluzione $t \mapsto x(t)$ dell'equazione del moto esiste regolare e conserva il valore della funzione \mathcal{E} . D'altra parte, la soluzione uscente dal (arbitrario) dato iniziale (x_0, \dot{x}_0) individua un insieme di punti $\{(x(t), \dot{x}(t))\}_{t \in \mathbb{I}_0}$ che sono relativi a istanti t di un qualche intervallo $\mathbb{I}_0 \ni t_0$ sul quale la soluzione $t \mapsto x(t)$ (supposta priva di istanti di arresto) è definita. Anzi, per la regolarità del moto, tali punti riempiono un arco di linea, la curva di fase, localmente regolare e contenuta nel piano π_f .

Sia $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(x_0, \dot{x}_0)$ il valore che il punto (x_0, \dot{x}_0) assegna alla \mathcal{E} ; l'arco di linea $\{(x(t), \dot{x}(t))\}_{t \in \mathbb{I}_0}$ appartiene necessariamente all'insieme di livello $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$. Si badi a non confondere tale linea con la traiettoria dell'elemento, che è contenuta nello spazio fisico (in questo esempio un tratto della retta $y = z = 0$). L'arco $\{(x(t), \dot{x}(t))\}_{t \in \mathbb{I}_0}$ della curva di fase appartiene all'insieme $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(x_0, \dot{x}_0)$ ed entrambi appartengono al piano π_f .

Nell'intorno di un qualsiasi punto (x, \dot{x}) esterno all'asse $\dot{x} = 0$ si ha $\partial\mathcal{E}/\partial\dot{x} = m\dot{x} \neq 0$; quindi in esso si ha $\nabla\mathcal{E} \neq 0$. D'altra parte, sull'asse $\dot{x} = 0$ si ha $\partial\mathcal{E}/\partial\dot{x} \equiv d\mathcal{V}/dx \neq 0$, e quindi anche in essi è $\nabla\mathcal{E} \neq 0$, a meno che la derivata $d\mathcal{V}/dx$ sia calcolata in un qualche punto critico x_c della funzione $\mathcal{V}(x)$.

Se ne traggono i seguenti risultati:

- (3.1) Nell'intorno di punti $(x, \dot{x}) \neq (x_c, 0)$, e cioè in punti nei quali è $|\nabla\mathcal{E}| \neq 0$, il teorema del Dini assicura che *gli insiemi di livello* $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ *sono linee, semplici e lisce*, la cui tangente è univocamente definita e parallela al vettore \mathbf{T} di componenti $(m\dot{x}, f_x(x))$ in quanto *ortogonale* al vettore $\nabla\mathcal{E} = (\frac{d}{dx}\mathcal{V}(x), m\dot{x})$. Per quanto detto sopra tali linee contengono,

interi, gli archi $\{(x(t), \dot{x}(t))\}_{t \in \mathbb{I}_0}$ delle curve di fase. Gli archi corrispondono a moti con condizioni iniziali (x_0, \dot{x}_0) scelte su di essi. Come si è detto, le tangenti a tali linee in ciascun loro punto sono parallele a $(m\dot{x}, f_x(x))$.

(3.2) L'unicità della soluzione passante per ciascun dato iniziale implica che le curve di fase non si possano intersecare. Quindi, le soluzioni sono *tutte rappresentazioni parametriche di archi* $\{x(t), \dot{x}(t)\}_{t \in \mathbb{I}_0}$ *semplici; questi ultimi si possono congiungere gli uni con gli altri* (senza essere il prolungamento l'uno degli altri) *al più nei punti* $(x_c, 0)$, e cioè in corrispondenza dei punti di equilibrio per il sistema. Questi ultimi sono gli unici punti che possono corrispondere a punti di non regolarità delle linee $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \text{cost}$, per i quali o è $|\nabla \mathcal{E}| = 0$, oppure $\nabla \mathcal{E}$ non è definito.

(3.3) Sull'asse $\dot{x} = 0$, uno stato $(\bar{x}, 0)$ che abbia $\bar{x} \neq x_c$ ha anche $f_x(\bar{x}) \neq 0$ e quindi è tale che $\nabla \mathcal{E} \neq 0$. Esso corrisponde a un istante di arresto in un punto \bar{x} che non è di equilibrio. Pertanto, pur essendo un punto singolare per la rappresentazione $\dot{x} = \dot{x}(x)$ delle curve $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$, è invece ordinario sia per quanto riguarda la loro rappresentazione $x = x(\dot{x})$, sia per quanto riguarda la rappresentazione parametrica del moto. Sebbene $\dot{x}(\bar{x})$ sia nullo, il tempo necessario a raggiungere lo stato $(\bar{x}, 0)$ è finito, si veda il Punto (7) più oltre, e il moto avviene in modo tale da rimanere per tempi finiti sull'arco della linea $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ che contiene $(\bar{x}, 0)$.

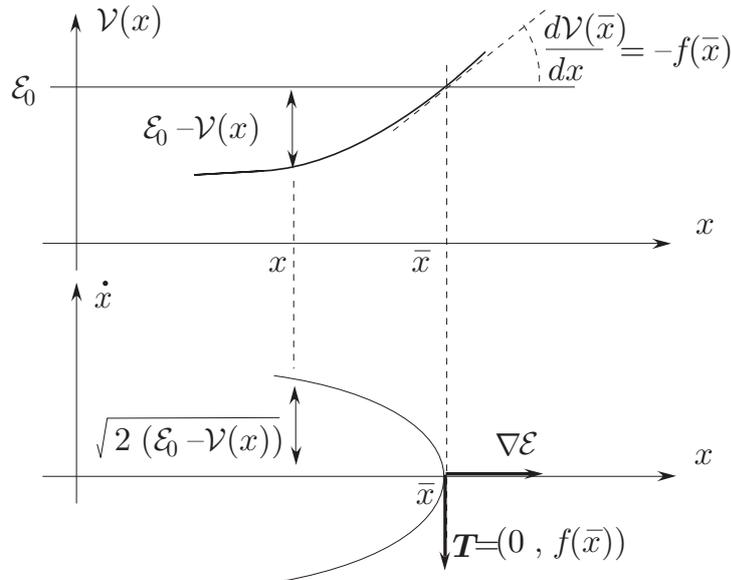
(3.4) Congiungendo fra loro i vari archi che vengono descritti al variare di t nell'intervallo massimale di definizione, si ha che per ogni fissato $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}(x_0, \dot{x}_0)$ la corrispondente linea $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ consiste di archi semplici, e ciascuno individua, in quanto contiene, l'intera curva di fase $\{x(t), \dot{x}(t)\}_{t \in \mathbb{I}}$, ove \mathbb{I} è l'intervallo (massimale) di definizione della soluzione individuata da una qualsiasi delle condizioni iniziali che sono compatibili con quel valore \mathcal{E}_0 e che, come tali, appartengono a quello stesso arco.

(4) In particolare, in virtù della speciale forma delle funzioni $\mathcal{T}(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ed $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$, per ogni assegnato valore \mathcal{E}_0 che la individua, la linea $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ è comunque, a eccezione dei punti $(x_c, 0)$, composta da due rami *simmetrici rispetto allo scambio* $\dot{x} \leftrightarrow -\dot{x}$. Essi consistono nei grafici delle due funzioni

$$(2.5) \quad \dot{x}(x) = + \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))} \quad \text{e} \quad \dot{x}(x) = - \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))},$$

che, per il Punto (3), sono archi regolari per ogni x tale che $\dot{x}(x) \neq 0$

(5) I due rami $\dot{x}(x) < 0$ e $\dot{x}(x) > 0$ si congiungono in punti $(\bar{x}, 0)$ dove la corrispondente linea $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ raggiunge l'asse $\dot{x} = 0$. I punti \bar{x} sono quelli nei quali, durante il moto, la velocità dell'elemento si annulla, e quindi, necessariamente, fra quelli per i quali $\mathcal{V}(x) = \mathcal{E}_0$.



Detto \bar{x} uno (qualsiasi) dei due *successivi zeri* $\bar{x}_{1,2}$ di $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)$, distinti ma eventualmente $\bar{x}_{1,2} = \infty$, *all'interno dei quali risulti: $(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)) > 0$* , si danno solo due casi possibili:

- (5.1) la funzione $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)$ si annulla in \bar{x} *in modo tangente* e quindi \bar{x} è anche un punto critico x_c per la \mathcal{V} (massimo locale o flesso), e come tale è di equilibrio per il sistema;
- (5.2) la funzione $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)$ *tocca e attraversa* in \bar{x} l'asse $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = 0$.

Nel primo caso, e cioè se in $\bar{x} \equiv x_c$ la $\mathcal{V}(x)$ è stazionaria, il punto x_c è un punto di equilibrio, e la soluzione non vi arriva per il teorema di unicità. La linea di livello $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0$ può anche proseguire al di là del punto critico, ma i vari rami incidenti il punto *corrispondono a soluzioni $x = x(t)$ diverse*, nel senso che non si raccordano per tempi finiti, *anche se tutte con la stessa energia \mathcal{E}_0* .

Nel secondo caso, come si è osservato nel Punto (3.1), la curva di livello per $(\bar{x}, 0)$ – e la soluzione cui essa corrisponde – attraversa l'asse $\dot{x} = 0$, e lo fa con tangente definita e parallela all'asse $x = 0$ giacché la prima componente del vettore tangente è \dot{x} che è ivi nulla. Sempre per il fatto che il punto non è di equilibrio *la stessa soluzione arriva nel punto $(\bar{x}, 0)$ e prosegue* nel semipiano opposto descrivendo (localmente) un arco simmetrico a quello ottenuto scambiando $\dot{x} \leftrightarrow -\dot{x}$; poi si allontana dall'asse delle x tanto più quanto più diminuisce il valore dell'energia potenziale $\mathcal{V}(x)$ a favore di quella cinetica. Sempre per il teorema di unicità relativo al dato iniziale $(\bar{x}, 0)$, *la stessa soluzione prosegue nel semipiano opposto fino a raggiungere l'altro punto: $\bar{x}_{1,2}$ nel quale è nuovamente $\mathcal{E}_0 = \mathcal{V}(x)$* .

- (6) Come si è detto, fuori dall'asse $\dot{x} = 0$ ciascun ramo di curva di livello individua un unico ramo di soluzione. Esse raggiungono il bordo della striscia $\{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2\}$ soltanto in corrispondenza ai punti $(\bar{x}_{1,2}, 0)$

giacché solo in essi si ha $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = 0$; se essi sono punti di equilibrio solo la linea di livello li raggiunge, ma non la soluzione in un tempo finito.

La continuità della funzione \mathcal{V} implica in ogni caso che ciascuna soluzione appartenga a una (sola) striscia $\{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2\}$; infatti: o il punto \bar{x} è critico per \mathcal{V} , e allora la soluzione non lo può “attraversare” oppure, non essendo \bar{x} critico per \mathcal{V} , per x adiacenti a esso e fuori dalla detta striscia si ha $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) < 0$, e quindi la linea di livello non può varcare la retta $x = \bar{x}$ (per valori reali della \dot{x}).

- (7) Si supponga che entrambi i punti \bar{x}_1 e \bar{x}_2 siano al finito: $|\bar{x}_{1,2}| < \infty$, che non siano punti di equilibrio, e che la funzione $\mathcal{V}(x)$ sia definita e continua su tutto l'intervallo $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$. A una (qualsiasi) soluzione $x = x(t)$ di energia \mathcal{E}_0 corrisponderà tutta una successione di archi “identici”, presi alternativamente l'uno successivo all'altro nell'ordinamento temporale, e contenuti in:

$$\begin{aligned} \gamma_- &:= \left\{ (x, \dot{x}) \mid \mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0, \quad \dot{x} \leq 0 \right\}, & \text{ed} \\ \gamma_+ &:= \left\{ (x, \dot{x}) \mid \mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0, \quad \dot{x} \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

I punti di ciascuno di tali due insiemi di archi rappresentano identici stati cinetici lungo il detto moto. Chiamato cioè (x_0, \dot{x}_0) un qualsiasi punto lungo uno di tali archi, sia per esempio il punto $(\bar{x}_1, 0)$ da considerarsi assunto all'istante $t_0 = 0$, lo stesso stato cinetico risulterà assunto (per la prima volta) in un qualche istante successivo: $t_1 = t_0 + T$ dalla stessa soluzione $x = x(t)$, giacché essa non ha incontrato punti di equilibrio e giacché la funzione \mathcal{V} è regolare sull'intervallo $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$. D'altra parte, visto che (per ipotesi) nell'equazione di moto non compare esplicitamente la variabile temporale, lo stato cinetico assunto in $t = t_1$ è identico a quello assunto in $t = t_0$; e pertanto la fase di moto che ha inizio in $t = t_1$ si ripeterà identica a quella che ha avuto inizio in $t = t_0$ e lo stesso stato cinetico verrà così nuovamente assunto in $t_2 = t_1 + T$. Se ne conclude che la soluzione $x = x(t)$, che si proietta nel piano (x, \dot{x}) sull'intera linea di livello $\{(x, \dot{x}) \mid \mathcal{E}(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_0\}$, risulta essere una *soluzione periodica rispetto alla variabile t* , di periodo T tale che

$$x(t+T) = x(t) + \int_t^{t+T} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad \text{o anche} \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \int_0^{T/2} \dot{x}(\tau) d\tau.$$

D'altra parte, nell'intervallo di tempo $(0, T/2)$ (scelto qui corrispondere al tratto γ_+) la \dot{x} è non nulla e tale che $dx/dt = \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))/m}$. È allora possibile calcolare il tempo $(t'' - t')$ necessario affinché la soluzione passi (senza ripetizioni) dall'uno all'altro di due (qualsiasi) punti $P', P'' \in \gamma_+$ mediante la

$$t'' = t' + \int_{x'}^{x''} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}}.$$

Si ottiene così in particolare il valore del periodo del moto:

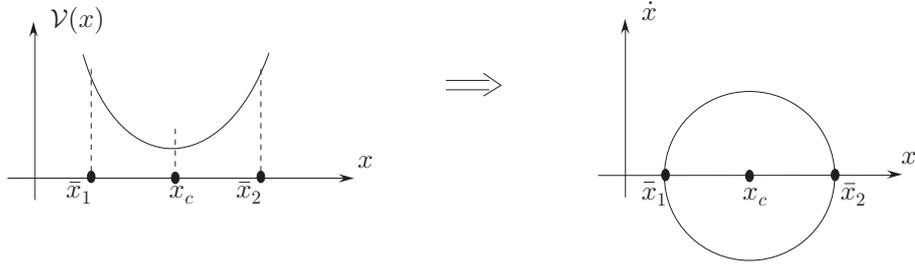
$$T = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}} .$$

Esso risulta finito se l'integrale è convergente, e cioè se $\bar{x}_{1,2} \neq \infty$ e se tali punti non sono equilibri, [in tal caso, infatti, il denominatore si annulla solo in $\bar{x}_{1,2}$, e siccome $\mathcal{V}'(\bar{x}_{1,2}) \neq 0$, i poli \bar{x}_1 e \bar{x}_2 sono solo dell'ordine di $\xi^{-(1/2)}$ e l'integrale (improprio) converge.] In tali ipotesi, e siccome l'area racchiusa dalla curva di fase $\{x(t), \dot{x}(t)\}_{t \in \mathbb{I}}$ è

$$\sigma = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))} d\xi , \quad \text{si calcola} \quad T = m \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}_0} .$$

Se, invece, una o entrambe le due intersezioni $\bar{x}_{1,2}$ sono di equilibrio, o sono all'infinito, allora o l'integrale $\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} d\xi / \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}$, o la traiettoria stessa, sono necessariamente divergenti.

In particolare, se la traiettoria nel piano π_f è chiusa e racchiude l'origine, e se \mathcal{V} è una funzione pari, allora: $T = 4 \int_0^{\bar{x}} d\xi / \sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}$.



Nell'esempio attuale si ha $\mathcal{V}(x) = \frac{1}{2}kx^2$, e quindi $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}k\bar{x}^2$, o anche $\bar{x} = \sqrt{2\mathcal{E}_0/k}$. Tale integrale fornisce allora:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{\bar{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{x}^2 - \xi^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

come si trova anche derivando rispetto alla \mathcal{E}_0 l'area dell'ellisse di semiassi \bar{x} e $\dot{x}_{\max} = \sqrt{2\mathcal{E}_0/m}$.

Nel caso generale, quando \overrightarrow{OP}_0 e \vec{v}_0 non sono paralleli, la discussione qualitativa è di minor aiuto: il teorema di conservazione dell'energia contiene tutte le variabili relative a \overrightarrow{OP} e \vec{v} , e non è di immediata discussione:

$$T + \mathcal{V} := \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) = \mathcal{E}_0 .$$

Conviene piuttosto, quando sia possibile, cercare altri eventuali integrali primi.

Stante il fatto che in questo esempio la forza è centrale di centro O , sussiste senz'altro quello relativo al momento della quantità di moto rispetto a O :

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \overrightarrow{OP}_0 \times \vec{v}_0 = \frac{1}{m} \vec{k}_O(t_0) .$$

Scelto allora $\vec{e}_3 := \text{vers } \vec{k}_O$, non nullo per ipotesi, si ottiene un primo risultato positivo: il problema si riduce di una variabile:

$$(2.6) \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x , \quad \ddot{y} = -\frac{k}{m}y ,$$

in quanto la funzione $z(t) = 0$ verifica l'equazione del moto e le condizioni iniziali.

Grazie alla sua estrema semplicità il sistema (2.6), come d'altra parte il sistema dato, è risolubile esplicitamente e fornisce, con $t_0 := 0$ e $\kappa := \sqrt{k/m}$,

$$(2.7) \quad \begin{cases} x(t) = x_0 \cos \kappa t + \frac{\dot{x}_0}{\kappa} \text{sen } \kappa t \\ y(t) = y_0 \cos \kappa t + \frac{\dot{y}_0}{\kappa} \text{sen } \kappa t \end{cases}$$

dalle quali ovviamente si riconosce nuovamente la costanza sia della velocità areolare sia dell'energia

$$\begin{cases} \rho^2 \dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} = \text{cost} = \frac{1}{m} \vec{k}_O(t_0) \cdot \vec{e}_3 = \rho_0^2 \dot{\theta}_0 \\ \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2} (x^2 + y^2) = \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{k}{2} (x_0^2 + y_0^2) = \mathcal{E}_0 . \end{cases}$$

Supponendo che la costante delle aree $\rho_0^2 \dot{\theta}_0 = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0$ sia non nulla, e cioè che il moto non sia rettilineo, dalla (2.7) si ricavano

$$\cos \kappa t = \frac{1}{\rho_0^2 \dot{\theta}_0} (x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0) , \quad \text{sen } \kappa t = \frac{\kappa}{\rho_0^2 \dot{\theta}_0} (yx_0 - xy_0)$$

e queste permettono di mostrare che la traiettoria nello spazio fisico è una curva (contenuta nel piano $z = 0$ e) di equazione

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) &:= \frac{(x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0)^2}{\kappa^2} + (yx_0 - xy_0)^2 = \frac{(\rho_0^2 \dot{\theta}_0)^2}{\kappa^2} = \\ &= x^2 \left(y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\kappa^2} \right) + y^2 \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\kappa^2} \right) - 2xy \left(x_0 y_0 + \frac{\dot{x}_0 \dot{y}_0}{\kappa^2} \right) . \end{aligned}$$

La curva è una conica, e siccome $(x_0 y_0 + \dot{x}_0 \dot{y}_0 / \kappa^2)^2 < (y_0^2 + \dot{y}_0^2 / \kappa^2) (x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \kappa^2)$ giacché $2x_0 y_0 \dot{x}_0 \dot{y}_0 < y_0^2 \dot{x}_0^2 + x_0^2 \dot{y}_0^2$, essa è un'ellisse, con semiassi inclinati rispetto agli assi coordinati di un angolo θ^* che è agevole determinare servendosi della proprietà degli assi principali: il parallelismo fra $\nabla \gamma(\overrightarrow{OP}^*)$ e \overrightarrow{OP}^* :

$$x^* y^* \left(\left(y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\kappa^2} \right) - \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\kappa^2} \right) \right) + \left(x^{*2} - y^{*2} \right) \left(x_0 y_0 + \frac{\dot{x}_0 \dot{y}_0}{\kappa^2} \right) = 0$$

da cui segue

$$\tan 2\theta^* = \frac{2x^*y^*}{x^{*2} - y^{*2}} = \frac{2(x_0y_0 + \dot{x}_0\dot{y}_0/\kappa^2)}{(y_0^2 + \dot{y}_0^2/\kappa^2) - (x_0^2 + \dot{x}_0^2/\kappa^2)}.$$

In questo esempio, come si è visto, l'origine è (l'unico) punto critico P_c della funzione \mathcal{V} , e come tale è posizione di equilibrio P_e per l'elemento. In particolare, tale P_c è punto di *minimo relativo* della funzione \mathcal{V} , e quindi esiste un suo conveniente intorno $\mathcal{N}(P_c)$ nel quale esso è anche l'unico punto di minimo per \mathcal{V} . Inoltre, l'arbitrarietà della costante additiva che descrive la famiglia di funzioni \mathcal{V} permette di assumere $\mathcal{V}(P_c) = 0$.

Siano dati comunque $\epsilon_v > 0$ ed $\epsilon_p > 0$, quest'ultimo tale che l'insieme $\mathcal{B}_{\epsilon_p}(P_c)$ definito dalla $\mathcal{B}_{\epsilon_p}(P_c) := \{P \mid |\overrightarrow{P_cP}| < \epsilon_p\}$ sia in $\mathcal{N}(P_c)$. Esistono, entrambi strettamente positivi, i valori

$$m_{\mathcal{V}} := \min \left\{ \mathcal{V} \mid |\overrightarrow{P_cP}| = \epsilon_p \right\} \quad \text{ed} \quad m_{\mathcal{T}} := \min \left\{ \mathcal{T} \mid v = \epsilon_v \right\},$$

e sia $\mathcal{E}_m := \inf \{ m_{\mathcal{T}}, m_{\mathcal{V}} \}$. Ancora per la proprietà di minimo e la continuità della \mathcal{E} esistono δ_p e δ_v tali che

$$0 < |\overrightarrow{P_cP}| < \delta_p \quad \text{e} \quad 0 < v < \delta_v \quad \text{implicano} \quad 0 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_m,$$

ed anzi risultano $\delta_p \leq \epsilon_p$ e $\delta_v \leq \epsilon_v$ perché altrimenti in $\mathcal{B}_{\delta}(P_c, 0) := \mathcal{B}_{\delta_p}(P_c) \times \mathcal{B}_{\delta_v}(0)$ vi sarebbero punti con $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$.

Si consideri un qualsiasi moto con condizioni iniziali $(P_0, \vec{v}_0) \in \mathcal{B}_{\delta}(P_c, 0)$, e quindi tali che $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m$. In ciascun istante durante tale moto rimane $\mathcal{E}(t) < \mathcal{E}_m$, e ciò implica che *ciascuno stato cinetico* (P, \vec{v}) di tale moto (che esiste per ogni $t \geq t_0$) è in $\mathcal{B}_{\epsilon}(P_c, 0) := \mathcal{B}_{\epsilon_p}(P_c) \times \mathcal{B}_{\epsilon_v}(0)$, giacché altrimenti la \mathcal{E} assumerebbe valori maggiori di \mathcal{E}_m .

In altre parole è stato possibile, scelti (ϵ_p, ϵ_v) determinare (δ_p, δ_v) tali che $(P_0, \vec{v}_0) \in \mathcal{B}_{\delta}(P_c, 0)$ implica $(P, \vec{v}) \in \mathcal{B}_{\epsilon}(P_c, 0)$, e ciò *non solo per tempi limitati*. Le condizioni iniziali (P_0, \vec{v}_0) , variate “per meno di δ ” delle $(P_c, 0)$, assicurano che il moto da esse determinato risulti variato “per meno di ϵ ” della quiete in P_c , che è il moto determinato dalle $(P_c, 0)$.

Tutto ciò viene ricordato, come si discuterà nuovamente nel § VI.5, dicendo che il punto P_c è di *equilibrio stabile*. \square

Esercizio 2.4 Si discutano i moti del pianeta:

$$(2.8) \quad \begin{cases} m \ddot{\overrightarrow{OP}} = - \frac{k m m_*}{|\overrightarrow{OP}|^2} \text{vers } \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP}(t_0) = \overrightarrow{OP}_0, \quad \dot{\overrightarrow{OP}}(t_0) = \vec{v}_0. \end{cases}$$

Solo per curiosità si ricordino i seguenti dati

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 6.664 \cdot 10^{-11} \text{Kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \\ m_S = 1.99 \cdot 10^{30} \text{Kg} \\ m_T = 5.976 \cdot 10^{24} \text{Kg} \\ \rho_{TS} := 1.49 \cdot 10^{11} \text{m} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_S \simeq k m_S / \rho_{TS}^2 = 5.973 \cdot 10^{-3} \text{ms}^{-2} \\ \langle v_T \rangle = \sqrt{a_S \rho_{TS}} = 2.983 \cdot 10^4 \text{ms}^{-1} \\ \quad = 107.39 \cdot 10^3 \text{Km h}^{-1} \\ R_T = 6.371 \cdot 10^6 \text{m} \\ a_T \simeq k m_T / R_T^2 = 9.811 \text{ms}^{-2} \end{array} \right.$$

La forza è centrale di centro O quindi, come si è già osservato, $\overrightarrow{OP} \times \vec{v} = \text{cost}$. Ciò implica che il moto è necessariamente piano, ovviamente sul piano che contenendo la posizione iniziale P_0 è ortogonale al prodotto vettoriale $\overrightarrow{OP}_0 \times \vec{v}_0$. Servendosi di coordinate polari su tale piano, con O come centro e per esempio \overrightarrow{OP}_0 come raggio polare, e senza esplicitamente esprimere la loro dipendenza da t , si hanno le

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = \rho \vec{u} \\ \dot{\overrightarrow{OP}} = \dot{\rho} \vec{u} + \rho \dot{\theta} \vec{\tau} \\ \ddot{\overrightarrow{OP}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{\tau} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{k}_O = 0 \\ \dot{\vec{u}} = \dot{\theta} \vec{\tau} \\ \dot{\vec{\tau}} = -\dot{\theta} \vec{u} \end{array} \right.$$

La stessa condizione di forza centrale implica poi direttamente che $\vec{a} \cdot \vec{\tau} \stackrel{\forall t}{=} 0$ da cui segue subito $\rho^2 \dot{\theta} = \text{cost} =: c$.

La proiezione della (2.8) lungo il versore di \overrightarrow{OP} fornisce allora l'equazione

$$(2.9) \quad \ddot{\rho} = -\frac{k m_*}{\rho^2} + \rho \dot{\theta}^2 = -\frac{k m_*}{\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^3},$$

che ammette il seguente teorema di conservazione:

$$\frac{1}{2} \dot{\rho}^2 - \frac{k m_*}{\rho} + \frac{c^2/2}{\rho^2} = \mathcal{R}_0 =: \frac{1}{2} \dot{\rho}_0^2 - \frac{k m_*}{\rho_0} + \frac{c^2/2}{\rho_0^2}.$$

Quest'ultimo è, d'altra parte, un'immediata conseguenza (della $\dot{\theta} = c/\rho^2$ e) del teorema di conservazione dell'energia:

$$\mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{V}(\rho) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k m m_*}{\rho} = \mathcal{E}_0,$$

il quale sussiste giacché, come si è già visto, la forza Newtoniana, centrale posizionale, è conservativa con energia potenziale (scegliendo $\mathcal{V}(\infty) = 0$)

$$\mathcal{V}(\rho) = \int^\rho \varphi(r) dr = k m m_* \int^\rho \frac{dr}{r^2} = -\frac{k m m_*}{\rho}.$$

Si introduca la *energia potenziale "efficace"*:

$$\mathcal{V}^{eff}(\rho) := \frac{\mathcal{V}(\rho)}{m} + \frac{c^2/2}{\rho^2} = -\frac{k m_*}{\rho} + \frac{c^2/2}{\rho^2};$$

l'equazione da discutere è la

$$(2.10) \quad \dot{\rho}^2 = 2(\mathcal{R}_0 - \mathcal{V}^{eff}(\rho)) \quad , \quad \text{con} \quad \mathcal{R}_0 \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{m} .$$

Dal fatto che $\frac{d}{d\rho} \mathcal{V}^{eff}(\rho) = \frac{k m_*}{\rho^2} - \frac{c^2}{\rho^3}$ si annulla in $\rho_- := \frac{c^2}{k m_*}$, e dal fatto che

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \mathcal{V}(\rho_-) = \frac{3c^2}{\rho_-^4} - \frac{2k m_*}{\rho_-^3} = \frac{(3k m_* - 2k m_*)}{\rho_-^3} > 0 ,$$

si può riconoscere che ρ_- è punto di minimo per la \mathcal{V}^{eff} . Si noti che ciò non sarebbe vero qualora la φ fosse del tipo $\varphi(\rho) = k\rho^\nu$ con $\nu > 3$. Ne segue che la “quiete” $\rho(t) = \rho_-$ è soluzione statica (stabile) della (2.9). *Si badi bene, tuttavia, al fatto che una tale “quiete” non individua posizioni di equilibrio!*

N.B. 2.5 Sia $\rho = \rho(t)$ funzione a valori reali, T -periodica mai nulla. Risulta T -periodica e mai nulla anche la funzione $\dot{\theta}(t) = c/\rho^2(t) =: \lambda(t)$; entrambe definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto, la funzione $\theta(t) - \theta_0 = \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau$ è funzione monotona crescente, invertibile, e tale che

$$\theta(t) - \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau = \theta(t_0) - \int_{t_0}^{t_0} \lambda(\tau) d\tau \quad \text{per ogni } t_0 \in \mathbb{R} .$$

Da questa si ricava, scegliendo in particolare $t_0 = t + T$, la

$$(2.11) \quad \theta(t + T) = \theta(t) + \int_t^{t+T} \lambda(\tau) d\tau .$$

Ma è

$$\int_t^{t+T} \lambda(\tau) d\tau = \int_t^0 \lambda(\tau) d\tau + \int_0^T \lambda(\tau) d\tau + \int_T^{t+T} \lambda(\tau) d\tau ,$$

e la periodicità di λ impone che sia $\int_T^{t+T} \lambda(\tau) d\tau = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$. Pertanto si ha

$$\int_t^{t+T} \lambda(\tau) d\tau = \int_0^T \lambda(\tau) d\tau =: \tilde{\Theta} .$$

Dalle (2.11) segue allora $\theta(t + T) = \theta(t) + \tilde{\Theta}$, e da questa, con $\ell \in \mathbb{Z}$, la $\theta(t + \ell T) = \theta(t) + \ell \tilde{\Theta}$ da cui

$$(2.12) \quad t(\theta) + \ell T = t(\theta + \ell \tilde{\Theta}) \quad \text{con} \quad \tilde{\Theta} := \int_0^T \lambda(\tau) d\tau .$$

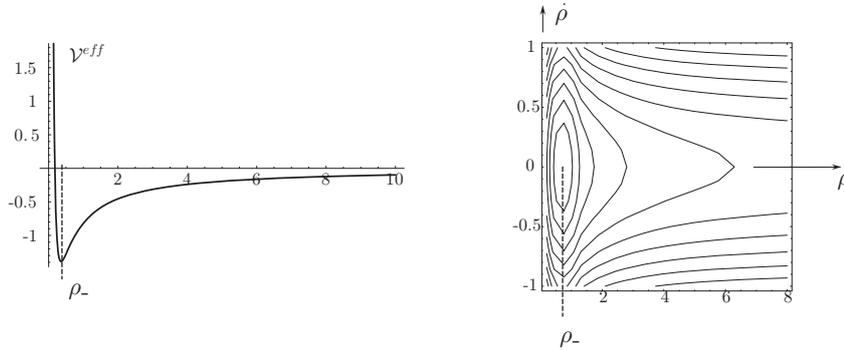
A priori, la grandezza $\tilde{\Theta}$ potrebbe non essere commensurabile con π . In tal caso il sapere che ρ è una funzione T -periodica, e che sussiste la legge delle aree, *non basta ad assicurare la periodicità del moto (fisico)*. Infatti, dalla 2π -periodicità del versore \vec{u} segue che se $\tilde{\Theta}/2\pi$ non è razionale non può esistere alcun tempo finito dopo il quale la traiettoria (nello spazio fisico) si chiude.

Se, invece, esistono $n, \ell \in \mathbb{N}$ tali che $\tilde{\Theta} = \int_0^T \lambda(\tau) d\tau = 2\pi n/\ell$ allora le due condizioni precedenti implicano il chiudersi della traiettoria dopo al più ℓ periodi e la periodicità del moto. Questo è ciò che accade ai moti di un corpo soggetto a una forza di tipo gravitazionale (come verrà mostrato nel successivo N.B.) per il quale la ρ e la T sono tali da rendere $\tilde{\Theta} = 2\pi$. \diamond

In definitiva, al crescere dell'energia iniziale e quindi della costante \mathcal{R}_0 si riconoscono

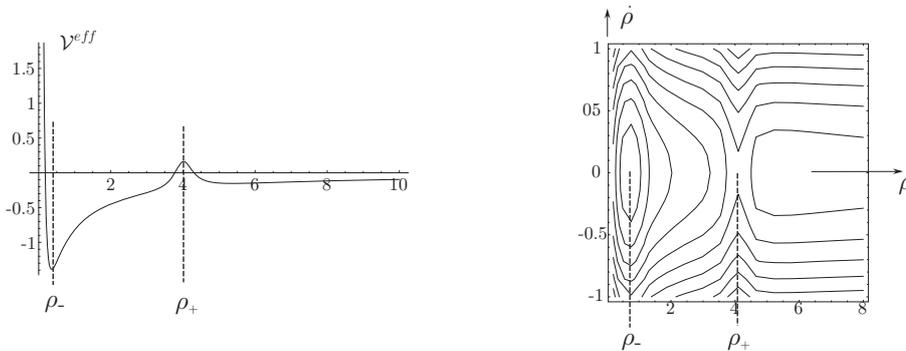
- (1) una traiettoria stazionaria circolare di raggio ρ_- stabile ma non attrattiva;
- (2) traiettorie comprese fra un *afelio* $\rho_{\max} = \bar{\rho}_2$ e un *perielio* $\rho_{\min} = \bar{\rho}_1$ detti *apsidi*, con $\rho(t)$ periodica di periodo $T = 2 \int_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2} d\xi / \sqrt{2(\mathcal{R}_0 - \mathcal{V}^{eff}(\xi))}$.

- (3) traiettorie che provenienti dallo spazio vi tornano dopo essere passate all'interno delle possibili orbite stazionarie.

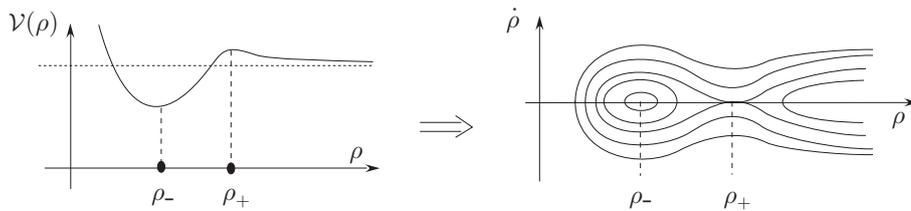


Se, a causa di eventuali altri effetti, questo schema si modifica per l'aggiunta di un termine del tipo $\mathcal{V}_\epsilon(\rho) = \frac{\epsilon^2 \rho}{\epsilon + (\rho - \rho_+)^2}$, con ϵ piccolo e $\rho_+ > \rho_-$, si ottiene una situazione nella quale si riconoscono traiettorie come quelle nei punti (1), (2), (3), e in più:

- (4) traiettorie che tornano allo spazio dopo essere passate all'esterno delle possibili orbite stazionarie;
- (5) un'orbita stazionaria circolare di raggio ρ_+ instabile e tre (aperte) che vi si avvicinano in modo asintotico. È chiaro tuttavia che data la loro instabilità nessuna di queste ultime è visibile nella figura qui sotto, che è stata tracciata numericamente e che quindi è insensibile agli "eventi rari".



Nella seguente figura sono state tracciate, *non numericamente*, anche le separatrici.



□

N.B. 2.6 Per dimostrare che il moto fisico dei pianeti è non solo t -periodico ma anche θ -periodico di periodo 2π , e quindi che le traiettorie del satellite nello spazio fisico sono (sotto le

ipotesi della (2.8) e nelle dette approssimazioni) *curve chiuse*, invece che valutare l'integrale $\tilde{\Theta} = \int_0^T c/\rho^2(\tau) d\tau$ è preferibile ricorrere al seguente procedimento che, infine, mostrerà addirittura la nota Prima legge di Keplero: *Le traiettorie dei pianeti sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi.*

Si consideri la funzione composta $\rho(t) =: \varrho(\theta(t))$, si veda il N.B. 5.4. Risulta (con ' per la $d/d\theta$)

$$(2.13) \quad \dot{\rho} = \varrho' \dot{\theta} = \frac{c}{\varrho^2} \varrho' = -c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\varrho} \right).$$

Posto allora $u := 1/\varrho$, dalla (2.10) si ricava la $\dot{\rho}^2 = c^2 u'^2 = 2(\mathcal{R}_0 - \mathcal{V}^{eff})$ da cui

$$(2.14) \quad u'^2 = \frac{2}{c^2} \left(\mathcal{R}_0 - \mathcal{V}^{eff}(1/u) \right) \equiv \frac{2}{mc^2} \left(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(1/u) \right) - u^2 =: \Upsilon(u).$$

Alternativamente, dalla (2.13) e dalla (2.9) segue

$$(2.15) \quad u'' + u = \frac{1}{mc^2} \frac{\varphi(1/u)}{u^2},$$

si veda anche la formula del Binet (5.11) nel Cap.I.

Dalle prime di queste relazioni, e con una discussione analoga a quella fatta nell'Esercizio 2.1, si riconosce che in un intorno dei punti di minimo u_c della funzione $\hat{\mathcal{V}}(u)/c^2 := \mathcal{V}^{eff}(1/u)$ la funzione $u(\theta)$ è periodica di periodo 2Θ , ove Θ è l'*angolo apsidale* $\Theta := \int_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2} du / \sqrt{\Upsilon(u)}$ racchiuso fra due successivi apsi (il *perielio* $1/\bar{u}_1$ e l'*afelio* $1/\bar{u}_2$), valori tali che $\Upsilon(\bar{u}_{1,2}) = 0$ e quindi $\dot{\rho} = 0$. A priori, e cioè per un qualsiasi \mathcal{V} , l'angolo Θ potrebbe non essere multiplo razionale di π . Tuttavia nel caso della gravitazione si ricava facilmente che il secondo membro della (2.15) ha valore costante: km_*/c^2 e ciò implica

$$(2.16) \quad u(\theta) = \frac{1}{p} + q \cos(\theta - \tilde{\theta}) \quad \text{ovvero} \quad \varrho(\theta) = \frac{p}{1 + pq \cos(\theta - \tilde{\theta})}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} := \frac{km_*}{c^2} =: u_-;$$

in questa, $\tilde{\theta}$ è anomalia per la quale la $\dot{\rho}$ si annulla. Si assumerà $\tilde{\theta} = 0$ e $\bar{\rho}_1 = \varrho(0) \leq \varrho(\pi) = \bar{\rho}_2$.

Come è noto, la (2.16) è l'equazione di una conica, e in particolare di un'ellisse se i dati sono opportuni (si veda oltre). Ciò implica che $\varrho(\theta)$ è funzione 2π -periodica e che $\Theta = \pi$, come si può confermare osservando che $\Upsilon(u) = [(u_0 - u_-)^2 - (u - u_-)^2]$. In particolare, e ragionando come nel N.B. 2.5, a partire dalla $t'(\theta) = \varrho^2(\theta)/c$ si ricava che $t(\theta)$ è anch'essa funzione *monotona crescente e tale che, per ogni θ si ha*

$$t(\theta + 2\pi) = t(\theta) + T \quad \text{con} \quad T = \int_0^{2\pi} \varrho^2(\xi)/c d\xi.$$

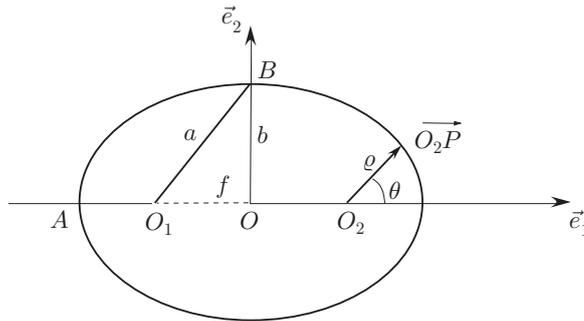
Tale valore individua il periodo temporale del moto. ◇

N.B. 2.7 Innanzi tutto si riconosca nella (2.16) l'equazione di una conica. Si inizi con la definizione canonica di ellisse:

$$(2.17) \quad \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = d = |\overrightarrow{O_1P}| + |\overrightarrow{O_2P}|$$

quadrando si ottiene $d^2(x^2 + y^2 + f^2) - 4x^2 f^2 = d^4/4$ da cui

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con} \quad a = \frac{d}{2} = OA, \quad b = \sqrt{a^2 - f^2} = OB$$



Mediante il teorema di Carnot sul triangolo O_1O_2P si ricava (con $\varrho := |\overrightarrow{O_2P}|$)

$$4f^2 + \varrho^2 + 4f\varrho \cos \theta = |\overrightarrow{O_1P}|^2$$

che posto nella (2.17) fornisce $4f^2 + \varrho^2 + 4f\varrho \cos \theta = (d - \varrho)^2$ e questa implica

$$(2.18) \quad \varrho = \varrho(\theta) = \frac{a^2 - f^2}{a + f \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

ove si sono definiti

$$p := \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - f^2}{a}, \quad e := \frac{f}{a} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$

e quindi

$$\frac{d}{2} = \frac{p}{1 - e^2} = a, \quad f = \frac{pe}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Analoghi ragionamenti portano a riconoscere che l'equazione (2.18) è quella di una conica generale, nella quale si distinguono i tre casi: ellisse, parabola, iperbole a seconda dei valori dell'eccentricità, rispettivamente: $0 < e < 1$, oppure $e = 1$, oppure $e > 1$. \diamond

Nel caso della gravitazione, e chiamato O_2 il centro della forza di attrazione: $-\varphi(\rho)\vec{u} := -k m m_* \overrightarrow{O_2P} / |\overrightarrow{O_2P}|$, nella (2.16) si è visto che

$$\varrho(\theta) = \frac{p}{1 + pq \cos(\theta - \theta_0)}, \quad \text{o anche} \quad q \cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{p},$$

e dipendono dai dati iniziali i parametri $p = c^2/k m_* \equiv \rho_-$, q , θ_0 , e l'eccentricità $e = pq$.

In particolare, scegliendo l'origine dell'ascissa temporale in modo tale che sia $\rho_0 = \bar{\rho}_1$, quando $t = 0$, e quindi $\theta_0 = 0$ e $\dot{\rho} = 0$, si ha

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2}{2\rho_0^2} - \frac{k m m_*}{\rho_0}, \quad \text{ovvero} \quad \rho_0 \frac{2\mathcal{E}_0}{mc^2} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{2}{\rho_-} \geq 0.$$

Da questa, e mediante la $q = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_-}$, si ottiene

$$q - \frac{1}{p} = \frac{2\mathcal{E}_0}{mc^2} \rho_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{mc^2} \frac{p}{1 + pq}$$

ovvero

$$p^2 q^2 - 1 = \frac{2\mathcal{E}_0}{mc^2} p^2 \quad \text{o anche} \quad p^2 q^2 = 1 + \frac{2\mathcal{E}_0 c^4}{mc^2 k^2 m_*^2}.$$

Questa fornisce l'eccentricità delle traiettorie dei pianeti, che risultano delle ellissi in quanto hanno $\mathcal{E}_0 < 0$ e $c \neq 0$ (le comete hanno $\mathcal{E}_0 > 0$)

$$e = pq = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}_0 c^2}{mk^2 m_*^2}}.$$

Nel caso ellittico, e definendo con T il tempo totale di rivoluzione lungo l'orbita, si ha $\dot{\sigma} = c/2 = \pi ab/T$. Ma si è anche visto che è $p = c^2/(k m_*) = b^2/a$. Se ne ricava la terza legge di Keplero:

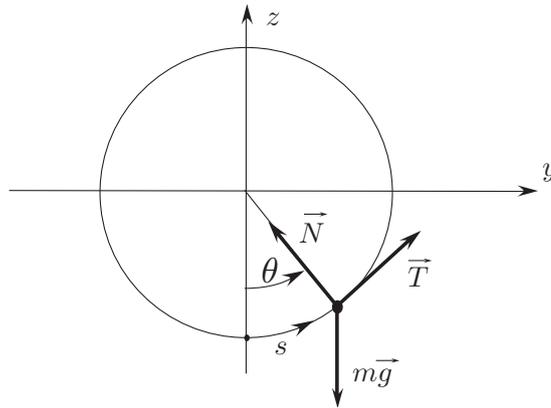
$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{k m_*}.$$

Esercizio 2.8 Il pendolo semplice.

Nello spazio di riferimento terrestre sia data una terna di assi con l'asse delle z verticale diretto verso l'alto. Un elemento pesante di massa m è vincolato alla linea la cui rappresentazione cartesiana è

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$$

Se ne discutano i possibili moti, assumendo il vincolo liscio.



Definita l'anomalia $\theta \in \mathbb{R}$ come in figura, è facile ricavare le seguenti relazioni

$$\left(\overrightarrow{OP}(\theta) \right)_e = R \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen } \theta \\ -\text{cos } \theta \end{pmatrix}; \quad \left(\vec{T}(\theta) \right)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{cos } \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}; \quad \left(\vec{N}(\theta) \right)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -\text{sen } \theta \\ +\text{cos } \theta \end{pmatrix}$$

mediante le quali si può calcolare la $s = \int_0^\theta (R\sqrt{\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta}) d\theta = R\theta$. Considerato poi che l'ipotesi di linea liscia fornisce sull'incognita reazione \vec{f}^v la caratteristica $\vec{f}^v \cdot \vec{T} = 0$, proiettando l'equazione della dinamica $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}^v$ sugli assi della terna intrinseca si ottiene il sistema

$$(2.19) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \text{sen } \theta \\ R\dot{\theta}^2 = -g \text{cos } \theta + \frac{1}{m} f_N^v \\ 0 = f_B^v. \end{cases}$$

La terza di queste relazioni fornisce una condizione necessaria sulla reazione esplicitata dal vincolo durante *un qualsiasi* moto compatibile.

La seconda condizione è atta al calcolo esplicito dell'unica componente ancora incognita della reazione esplicitata dal vincolo durante un particolare moto, *una volta che certe assegnate condizioni iniziali e la prima delle (2.19) ne permetteranno la determinazione.*

La prima è una relazione scalare "pura" in quanto non contiene incognite concernenti la reazione vincolare. Inoltre, essendo un'equazione differenziale, del secondo ordine, risolta in forma normale, nell'unica incognita: l'anomalia $\theta = \theta(t)$, se unita a opportune condizioni iniziali (compatibili) *fornisce la soluzione di tutto il problema.* Essa ammette un integrale primo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(s, \dot{s}) &= \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - \int^s f_T(\sigma) d\sigma && \text{o anche} \\ \mathcal{E}(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + \int^{R\theta} mg \text{sen } \theta d(R\theta) = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \text{cos } \theta, \end{aligned}$$

e quindi il teorema di conservazione (con $\mathcal{E}(0, \pi/2) = 0$):

$$(2.20) \quad \mathcal{E}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \text{cos } \theta = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}_0^2 - mgR \text{cos } \theta_0 =: \mathcal{E}_0.$$

Si noti che la funzione $\mathcal{E}(\theta, \dot{\theta})$ è proprio ciò che si ottiene calcolando l'energia totale:

$$\mathcal{T}(\vec{v}) + \mathcal{V}(\vec{OP}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz + \text{cost}$$

durante un moto compatibile. Con $y(\theta) = R \sin \theta$, $z(\theta) = -R \cos \theta$, $\dot{y}(\theta) = R\dot{\theta} \cos \theta$, $\dot{z}(\theta) = R\dot{\theta} \sin \theta$, e con la scelta $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(\vec{OP}(\pi/2)) = 0$, si ha infatti

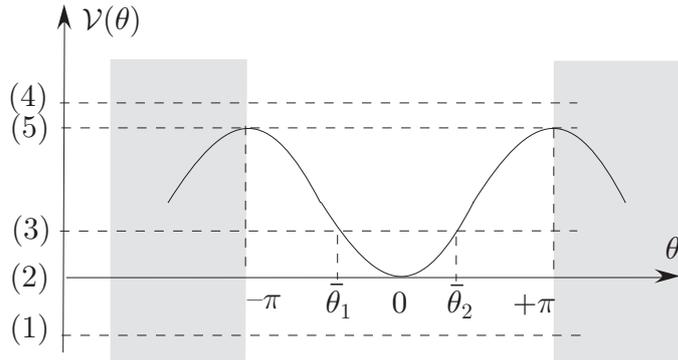
$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{v}(\theta, \dot{\theta})) &= \frac{1}{2} m v^2(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \\ \mathcal{V}(\vec{OP}(\theta)) &= mgz(\theta) = -mgR \cos \theta . \end{aligned}$$

Si noti anche che la (2.20), scritta nella forma $\mathcal{T} - \mathcal{T}_0 = \mathcal{V}_0 - \mathcal{V}$ fornisce una relazione il cui secondo membro ha differenziale (totale) pari al lavoro elementare della forza: $-d\mathcal{V} = d\mathcal{L} = -mgR \sin \theta d\theta$ lungo la linea vincolare.

Per discutere convenientemente la (2.20) è opportuno riscriverla in forma adimensionale:

$$\frac{R}{2g} \dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{E}_0}{mgR} + \cos \theta = \left(\frac{R}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 \right) + \cos \theta =: \tilde{\mathcal{E}}_0 + \cos \theta,$$

e si vede che i valori della costante $\tilde{\mathcal{E}}_0$, e quindi delle condizioni iniziali, possono essere raggruppati in quattro distinti insiemi:



- (1) Non esistono dati iniziali per i quali $\tilde{\mathcal{E}}_0 := \frac{R}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 < -1$, ovvero per i quali $\mathcal{E}_0 < -mgR$.
- (2) Se $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ è tale che $\tilde{\mathcal{E}}_0 = -1$, non può che essere $(\theta_0, \dot{\theta}_0) =: (\theta_m, 0) = (0, 0)$ e la soluzione è la quiete in $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$. Inoltre, θ_m è punto di minimo per l'energia potenziale $\mathcal{V}(\vec{OP}(\theta))$ quindi, come nella discussione fatta negli esempi precedenti, $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ è un punto circondato da curve chiuse (e non valicabili per il teorema di unicità) come tale, esso risulta di equilibrio stabile.
- (3) Se $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ è tale che $\tilde{\mathcal{E}}_0 \in (-1, +1)$, l'equazione

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\theta) \equiv \mathcal{E}_0 + mgR \cos \theta = 0, \quad \text{e cioè l'equazione } \tilde{\mathcal{E}}_0 = -\cos \bar{\theta}$$

ammette due soluzioni: $-\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \arccos \tilde{\mathcal{E}}_0$, distinte, simmetriche rispetto all'origine, appartenenti all'intervallo aperto $(-\pi, +\pi)$, e tanto più lontane da essa quanto minore è il valore $\cos \bar{\theta}_i = -\tilde{\mathcal{E}}_0$. Dato il fatto $\bar{\theta}_i \neq 0, \pm\pi$,

nessuna delle due è un punto di equilibrio. La soluzione $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$, attraversando l'asse delle θ , lo fa nei punti $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ che non sono di equilibrio, quindi essa prosegue nel semipiano in cui $\dot{\theta}$ ha il segno opposto. La coordinata θ rimane limitata fra i due valori $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ e, data la simmetria sul piano delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$ dei due archi

$$(2.21) \quad \dot{\theta}(\theta) = \pm \sqrt{\frac{2}{mR^2} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}(\theta)))} = \pm \sqrt{\frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \bar{\theta})},$$

la linea $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è chiusa.

- (4) Se $\dot{\theta}_0^2$ è così grande che $\tilde{\mathcal{E}}_0 > +1$ allora si ha che $|\dot{\theta}|$ è sempre strettamente positivo, e il moto non ha mai istanti di arresto: le linee $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ non attraversano mai l'asse delle θ e la "striscia" corrispondente a queste condizioni iniziali è tutto il piano. In particolare:

La coordinata $\theta \in \mathbb{R}$ cresce non limitata e tale che $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$ per ciascun $t \in \mathbb{R}$ e per $T := \int_0^{2\pi} d\sigma / \dot{\theta}(\sigma)$.

Infatti: $\dot{\theta}(\theta)$ è 2π -periodica, mai nulla. Quindi, la $t(\theta) - t(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} d\sigma / \dot{\theta}(\sigma)$ è funzione monotona e invertibile. Analogamente a quanto fatto per la (2.11) si trova la

$$t(\theta + 2\pi) - t(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{d\sigma}{\dot{\theta}(\sigma)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\dot{\theta}(\sigma)} =: T$$

la cui inversa dà $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$, corrispondente alla (2.12). Resta invece T -periodica la coordinata θ definita sul toro \mathbb{S}^1 .

- (5) Se $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ è tale che $\tilde{\mathcal{E}}_0 = +1$, e cioè se le condizioni iniziali sono tali che $\frac{R}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 = -\cos \theta_c$ essendo θ_c un punto critico *ma non di minimo* per la funzione $\mathcal{V}(\overrightarrow{OP}(\theta))$ (in questo caso è $\theta_c = \pm\pi$), allora possono darsi i due sotto-casi:

(5.1) $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\pi, 0)$ oppure $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (+\pi, 0)$, *solo fisicamente* coincidenti. Il moto è la quiete nel punto iniziale $(\theta_c, 0)$ che, per la discussione appena fatta, è un punto di equilibrio instabile.

(5.2) $(\theta_0, \dot{\theta}_0) \notin \{(-\pi, 0), (+\pi, 0)\}$, e allora il moto si svolge lungo un arco di separatrice, luogo dei punti di \mathbb{R}^2 tali che $\mathcal{E}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{E}(\theta_c, 0)$ con θ_c un punto critico non di minimo per la $\mathcal{V}(\overrightarrow{OP}(\theta))$. Le linee $\{\theta(t), \dot{\theta}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, qui definite da $\frac{R}{2g} \dot{\theta}^2 - \cos \theta = +1$, connettono i due punti di equilibrio $-\pi, \pi$ senza raggiungerli in tempi finiti. Sul toro \mathbb{S}^1 il punto di equilibrio instabile è unico, e tali sue caratteristiche non mutano sia che ci si avvii ad esso da destra che da sinistra.

Nel caso (3), e cioè se $-1 < \mathcal{E}_0/mgR =: \tilde{\mathcal{E}}_0 = -\cos \bar{\theta} < 1$, mediante la (2.21) si determina il *periodo esatto* del pendolo fisico; esso è dato dalla

$$(2.22) \quad T = 4 \int_0^{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\overrightarrow{OP}(\theta)))}} = 4 \int_0^{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \bar{\theta})}}.$$

Tuttavia, per l'esplicito calcolo della (2.22) è più opportuno usare le seguenti posizioni

$$(\cos \theta - \cos \bar{\theta}) = 2 \left(\text{sen}^2 \frac{\bar{\theta}}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \text{sen} \frac{\bar{\theta}}{2} =: \alpha, \quad \frac{1}{\alpha} \text{sen} \frac{\theta}{2} =: \text{sen} \psi ,$$

e quindi

$$2(\cos \theta - \cos \bar{\theta}) = 4\alpha^2(1 - \text{sen}^2 \psi), \quad d\theta = \frac{2\alpha\sqrt{1 - \text{sen}^2 \psi}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 \psi}} d\psi ,$$

mediante le quali la (2.22) si trasforma nella

$$(2.23) \quad T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \bar{\theta})}} = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 \psi}} .$$

Si supponga, ora, che i dati iniziali siano tali da individuare un valore convenientemente piccolo (appena superiore al suo minimo valore: -1) per la costante \mathcal{E}_0/mgR , e che quindi il parametro (positivo) $\alpha = \text{sen}(\bar{\theta}/2) = \sqrt{(1 + \mathcal{E}_0/mgR)/2}$ risulti molto minore dell'unità. In tal caso, il calcolo *finora esatto* del periodo del pendolo, e che ha dato luogo alla (2.23), può proseguire in forma approssimata facendo ricorso a uno sviluppo di Taylor, mediante il quale si ricava la relazione tanto più vera quanto più ϵ è vicino allo zero:

$$(2.24) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon}} \simeq 1 + \epsilon \left(-\frac{1}{2}(1 - \epsilon)^{-3/2}(-1) \right) \Big|_{\epsilon=0} = 1 + \frac{\epsilon}{2} .$$

Dalla (2.23) e mediante le seguenti relazioni, delle quali la seconda è tanto più vera quanto più ϵ è vicino allo zero,

$$(2.25) \quad \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{4} ;$$

$$(2.26) \quad \text{sen} \epsilon \simeq 0 + \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{6} .$$

si trova così la stima:

$$T \simeq 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\alpha^2 \text{sen}^2 \psi}{2} \right) d\psi = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{\bar{\theta}^2}{16} \right)$$

che evidentemente dipende dall'ampiezza iniziale.

Diverso è il caso "linearizzato": $\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\theta$ che ha $\mathcal{V}_{lin}(\theta) = \frac{g}{2R}\theta^2 + \text{cost}$ e quindi

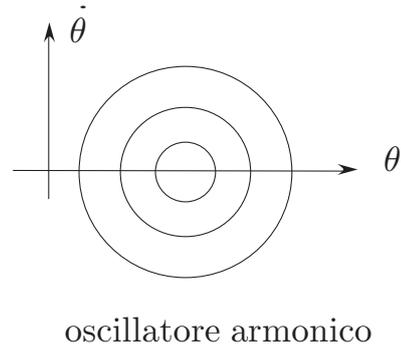
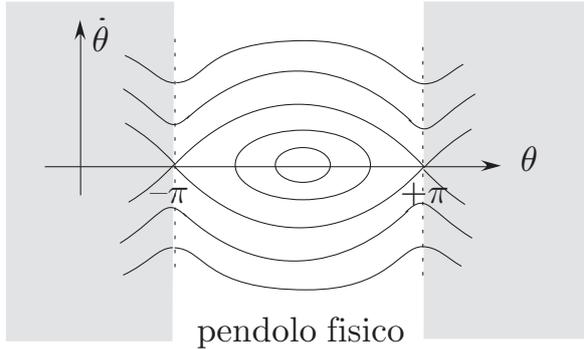
$$\frac{\mathcal{E}_0}{mR^2} - \mathcal{V}_{lin}(\theta) = \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 + \frac{g}{2R}(\theta_0^2 - \theta^2) =: \frac{g}{2R}(\bar{\theta}^2 - \theta^2).$$

In esso, il calcolo del periodo dà un risultato strutturalmente diverso da quello non lineare, e ad esso vicino *solo in prima approssimazione*, così come $\mathcal{V}_{lin} + \text{cost}$ è

il troncamento al terz'ordine dello sviluppo di Taylor della funzione $\mathcal{V}(\overrightarrow{OP}(\theta)) = -\frac{g}{R} \cos \theta \simeq -\frac{g}{R} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots \right)$. Per il caso lineare infatti, e per qualsiasi $\bar{\theta}$, anche grande, risulta

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{\sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d \operatorname{sen} \psi}{\cos \psi} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

del tutto indipendente dal valore iniziale \mathcal{E}_0 .



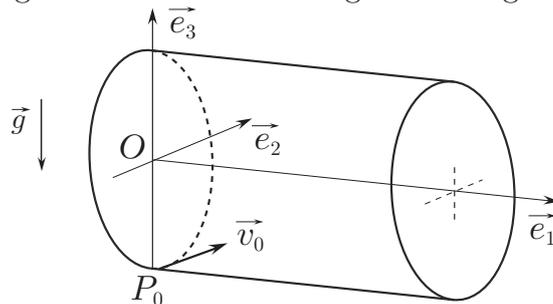
In ogni caso, fissato comunque il punto $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$, la seconda delle (2.19) insieme con il teorema di conservazione (2.20), fornisce se non proprio il valore in funzione del tempo della reazione esplicitata dal vincolo durante il moto effettivo uscente da $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$, almeno il valore di tale reazione in corrispondenza alla posizione individuata dall'anomalia θ , e prescinde quindi dall'istante nel quale tale posizione viene assunta. Essa è

$$\begin{aligned} \vec{f}_N^v(\theta) &= [mR\dot{\theta}^2(\theta) + mg \cos \theta] \vec{N}(\theta) \\ (2.27) \qquad &= mg \left[2 \left(\tilde{\mathcal{E}}_0 + \cos \theta \right) + \cos \theta \right] \vec{N}(\theta) , \end{aligned}$$

e ovviamente essa è comunque subordinata alla condizione di realtà dei valori della funzione $\dot{\theta}(\theta)$, come si vede subito dalla (2.20):

$$\frac{R}{2g} \dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{E}_0}{mgR} + \cos \theta = \tilde{\mathcal{E}}_0 + \cos \theta \geq 0 \quad \text{che implica} \quad \tilde{\mathcal{E}}_0 \geq -1 . \quad \square$$

Esercizio 2.9 Si esamini il caso unilaterale, di un elemento appoggiato all'interno di un cilindro circolare retto a generatrici orizzontali, cavo, liscio, fisso nello spazio terrestre. Si supponga che l'elemento abbia, in un certo istante t_0 , posizione di confine e velocità tangente al vincolo ed ortogonale alle generatrici.



Benché analiticamente simile al precedente esempio, il caso in esame è meccanicamente assai diverso. Infatti, fintanto che il moto è di confine, esso avviene lungo la circonferenza intersezione del cilindro con il piano ortogonale alle generatrici e contenente posizione e velocità iniziali. Questo caso pertanto è identico al precedente *salvo che per quanto concerne la relazione caratteristica del vincolo*. Diversamente da quello bilaterale, questo contiene solo reazioni che, normali alla superficie, *hanno versi diretti nel semispazio permesso*; e cioè, detta \vec{n} la normale alla superficie orientata verso il semispazio permesso (quello contenente l'asse del cilindro), reazioni tali che $\vec{f}^v = f_n^v \vec{n}$, con $f_n^v \geq 0$.

Ma il piano contenente l'indicata circonferenza (è osculatore per essa ed) è ortogonale alla superficie del cilindro in ciascuno dei punti intersezione. Quindi *i due vettori $\vec{N}(\overline{OP})$ ed $\vec{n}(\overline{OP})$ coincidono per ogni punto $P \in \{x = 0\} \cap \{y^2 + z^2 = R^2\}$* , ove si è chiamato x l'asse parallelo alle generatrici. Si ricava così che $r_N \equiv r_n$.

La (2.27) va allora unita alla condizione: $r_N \geq 0$ e, naturalmente, a quella circa la realtà dei valori di $\dot{\theta}$. Ne segue che affinché il moto sia di confine occorre che sussistano le due seguenti condizioni, delle quali la prima è necessaria per la realtà di $\dot{\theta}$, e la seconda, in base alla unicità del moto, perché esso sia di confine

$$(2.28) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}_0 + \cos \theta \geq 0 \\ 2\tilde{\mathcal{E}}_0 + 3 \cos \theta \geq 0, \end{cases} \quad \text{equivalenti a} \quad \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_0}{mgR} + \cos \theta \geq 0 \\ \frac{2\mathcal{E}_0}{mgR} + 3 \cos \theta \geq 0. \end{cases}$$

Infine, va tenuto presente che la costante $\tilde{\mathcal{E}}_0 := \frac{\mathcal{E}_0}{mgR} := \frac{R}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0$ può assumere valori solo nella semiretta $[-1, +\infty)$, e quindi non può che essere $\tilde{\mathcal{E}}_0 \geq -1$.

Dalla discussione delle condizioni

$$(2.29) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}_0 + \cos \theta \geq 0, \\ \tilde{\mathcal{E}}_0 + \frac{3}{2} \cos \theta \geq 0, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \cos \theta \geq -\tilde{\mathcal{E}}_0, \\ \cos \theta \geq -\frac{2}{3} \tilde{\mathcal{E}}_0, \end{cases}$$

si deducono i seguenti casi, in entrambi i quali è comunque $\tilde{\mathcal{E}}_0 \geq -1$:

- (1) Se $\tilde{\mathcal{E}}_0 \leq 0$ è anche $-\tilde{\mathcal{E}}_0 \geq -(2/3) \tilde{\mathcal{E}}_0$, e la prima delle (2.29) implica la seconda. Inoltre, detto $\bar{\theta}$ tale che $-\tilde{\mathcal{E}}_0 = \cos \bar{\theta}$, risulta $|\bar{\theta}| \leq \pi/2$.

In tal caso, se un moto è compatibile con il vincolo bilaterale certo la prima è verificata e allora tale moto è anche compatibile con quello unilaterale e *non c'è distacco*.

- (2) Se $\tilde{\mathcal{E}}_0 \geq +3/2$ la seconda delle (2.29) è comunque verificata ed implica la prima; anche in questo caso *non c'è distacco*.

- (3) Se $0 < \tilde{\mathcal{E}}_0 < 3/2$ l'equazione $\cos \theta^* = -\tilde{\mathcal{E}}_0/3$ ammette soluzione, e individua posizioni di confine oltre le quali, se il moto fosse di confine, il vincolo dovrebbe agire sull'elemento con una reazione che **pur essendo esplicabile dal vincolo bilaterale non lo è da quello unilaterale**: l'ipotesi che il moto sia di confine non è pertanto compatibile e in θ^* si ha il distacco. □

Non nuoce ripetere qui le due osservazioni fatte alla fine del precedente paragrafo:

N.B. 2.10 Sia $\varphi(x, y, z) \geq 0$ l'equazione del vincolo unilaterale; se il moto $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(t)$ è tale che $\varphi(\overrightarrow{OP}(t_0)) = \varphi(\overrightarrow{OP}_0) = 0$ e che $\varphi(\overrightarrow{OP}(t))$ è derivabile in t_0 allora anche la $\overrightarrow{OP}(t_0)$ è necessariamente compatibile con il vincolo "bilaterale" e non unilaterale. Infatti la $\varphi(\overrightarrow{OP}(t))$ ammette in t_0 valore minimo. \diamond

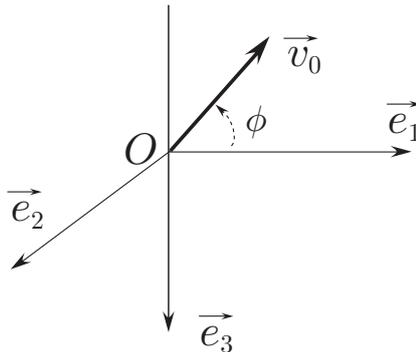
N.B. 2.11 Data una specifica forza attiva, la reazione \vec{f}^v che il vincolo esplica (durante un certo moto) in $(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, t)$ è l'unica che riporta il vettore $\frac{1}{m}(\vec{f}^{att} + \vec{f}^v)$ fra le accelerazioni compatibili con i moti *di confine* (e non ordinari) perché in caso contrario la \vec{f}^v si dovrebbe annullare in modo discontinuo. \diamond

Esercizio 2.12 La parabola di sicurezza.

Il problema del moto:

$$\begin{cases} \ddot{\overrightarrow{OP}} = \vec{g}, & t_0 = 0, \\ P_0 \equiv O, & \dot{y}_0 = 0. \end{cases}$$

Si osservi che è sempre possibile scegliere il riferimento in tal modo. Sia poi anche $\vec{e}_3 \equiv \vec{g}$, e si chiami ϕ l'anomalia che \vec{v}_0 forma rispetto a \vec{e}_1 positiva nel verso antiorario rispetto a \vec{e}_2 .



La funzione $y(t) = 0$ verifica il problema. D'altra parte il fatto che il moto sia piano è diretta conseguenza del carattere centrale della forza. La soluzione è data da

$$(2.30) \quad \begin{cases} x(t) = \dot{x}_0 t = v_0 t \cos \phi \\ z(t) = \dot{z}_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = -v_0 t \sin \phi + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

e la traiettoria quindi, nell'ipotesi che sia $\dot{x}_0 \neq 0$, è

$$(2.31) \quad z = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2 - \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} x = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi} x^2 - x \tan \phi;$$

qualora invece la \dot{x}_0 fosse nulla la traiettoria si riduce alla retta verticale che passa per l'origine.

Si supponga $\dot{z}_0 < 0$, e quindi $0 < \phi < \pi/2$. Risulta positiva la *gittata*:

$$L := \frac{2\dot{z}_0 \dot{x}_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi,$$

che è massima per $\phi = \pi/4$.

Domanda:

Date le coordinate (x_B, z_B) di un bersaglio B , quale \vec{v}_0 è necessaria per colpirlo?

Risposta:

Se $x_B = 0$ occorre $\phi = \pm\pi/2$ (o $v_0 = 0$). Inoltre la (2.30) fornisce $z_B = \dot{z}_0 t + g t^2/2$, che ammette valori reali per la t solo se il discriminante risulta positivo: $\dot{z}_0^2 + 2gz_B \geq 0$.

Se $x_B \neq 0$ si ha $\phi \neq \pm\pi/2$. Mediante l'identità $1/\cos^2 \phi = \tan^2 \phi + 1$ la (2.31) fornisce

$$\frac{g}{2v_0^2} (\tan^2 \phi + 1)x_B^2 - \tan \phi x_B - z_B = 0$$

ovvero

$$(2.32) \quad gx_B^2 \tan^2 \phi - 2v_0^2 x_B \tan \phi + gx_B^2 - 2v_0^2 z_B = 0.$$

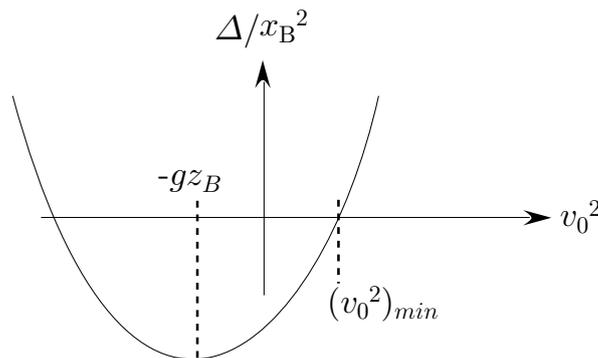
Questa permette un valore reale per $\tan \phi$ solo se sussiste la condizione necessaria

$$\Delta := v_0^4 x_B^2 - gx_B^2 (gx_B^2 - 2v_0^2 z_B) \geq 0$$

o anche

$$(2.33) \quad v_0^4 + 2gz_B v_0^2 - g^2 x_B^2 \geq 0.$$

Considerando fissate le coordinate del bersaglio, la (2.33) mostra che il minimo valore per la v_0 necessaria a colpire il bersaglio è $(v_0^2)_{\min} = -gz_B + \sqrt{g^2 z_B^2 + g^2 x_B^2}$.

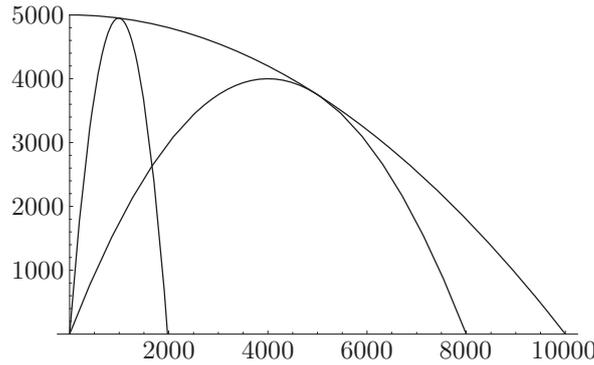


Con questo valore, $\tan \phi$ è unico e vale

$$\tan \phi = \frac{v_0^2}{gx_B} = -\frac{z_B}{x_B} + \sqrt{\frac{z_B^2}{x_B^2} + 1} =: \tan \alpha_B + \frac{1}{\cos \alpha_B}$$

ove si è chiamato $\alpha_B := \arctan(-z_B/x_B)$.

Ancora con le coordinate x_B, z_B del bersaglio fissate, la (2.33) mostra che qualora la v_0^2 sia maggiore della $(v_0^2)_{\min}$ si hanno due valori per $\tan \phi$.



La figura è fatta con $g/(2v_0^2) = 5 \cdot 10^{-5} [m^{-1}]$, e con $\phi_1 \simeq 85^\circ$, e $\phi_2 \simeq 60^\circ$; e il vertice di ciascuna parabola di volo ha coordinate $(v_0^2/2g) (\sin 2\phi, \sin^2 \phi)$.

Quando invece sia fissato il valore della v_0 , dalla (2.33) si può ricavare il luogo dei punti che possono essere colpiti. Essi sono quelli all'interno della parabola, anch'essa mostrata in figura,

$$z = \frac{g}{2v_0^2} x^2 - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Il suo punto più alto e più vicino all'origine (che è, ovviamente, il punto di fuoco della parabola) risulta avere coordinate $x_B = 0$ e $z_M = -v_0^2/2g$. Il suo punto più lontano dal fuoco è quello corrispondente alla gittata massima: $x_B = v_0^2/g$ e si ottiene per $\phi = \pi/2$. \square

Esercizio 2.13 Dimostrare che se due rette r_1 ed r_2 sono incidenti in un punto C e se i due momenti assiali k_{r_1} e k_{r_2} della quantità di moto di un elemento sono entrambi costanti, allora è costante il momento polare della quantità di moto rispetto al punto C .

Dimostrazione Siano Q_1 e Q_2 due punti delle rette r_1 ed r_2 rispettivamente, e si chiamino \vec{u}_1 ed \vec{u}_2 due versori a esse rispettivamente paralleli. Le due rette siano cioè individuate: la retta r_1 da (Q_1, \vec{u}_1) , e la retta r_2 da (Q_2, \vec{u}_2) . Si scelga poi il sistema di riferimento in modo, per esempio, tale che: $(Q_1, \vec{u}_1) \equiv (O, \vec{e}_1)$, e che $\vec{u}_2 \perp \vec{e}_3$, e quindi sia $\vec{u}_2 = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2$ per un qualche α .

Ricordando la definizione di *momento assiale* della quantità di moto di un elemento rispetto a una retta $r := (Q, \vec{u})$, con tale notazione si hanno le

$$k_{r_1} = \vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{OP} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix},$$

$$k_{r_2} = \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{OP} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \cos \alpha \begin{vmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} - \sin \alpha \begin{vmatrix} x & z \\ \dot{x} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

da queste segue che è necessariamente costante anche il termine $k_y = \begin{vmatrix} x & z \\ \dot{x} & \dot{z} \end{vmatrix}$.

Ma allora, l'identità

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} \times \vec{v} \equiv xk_x + yk_y + zk_z = 0$$

implica che è anche nullo il derivato

$$\overrightarrow{OP} \times \dot{\vec{k}}_O \equiv x\dot{k}_x + y\dot{k}_y + z\dot{k}_z = z\dot{k}_z = 0$$

e ciò per ogni valore della variabile z . Ne segue necessariamente $k_z = \text{cost.}$ \square

Si concluderà questo paragrafo con alcuni ulteriori esempi di discussione qualitativa.

Esempio 2.14 L'equazione di Duffing con potenziale attrattivo debole:

$$\ddot{x} = -k^2x + \varepsilon x^3 \quad \text{con} \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Si ha evidentemente $\mathcal{V}(x) = k^2x^2/2 - \varepsilon x^4/4 + \tilde{\mathcal{V}}$, i cui punti critici sono $x_{c,s} := 0$ ed $x_{c,u} = x_{\pm} := \pm\sqrt{k^2/\varepsilon}$. La separatrice ha equazione (posto $y := \dot{x}$):

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2}{2}x^2 - \frac{\varepsilon}{4}x^4 = \mathcal{E}(x_{\pm}, 0) = \frac{k^4}{4\varepsilon}, \quad \text{con} \quad \tilde{\mathcal{V}} := 0.$$

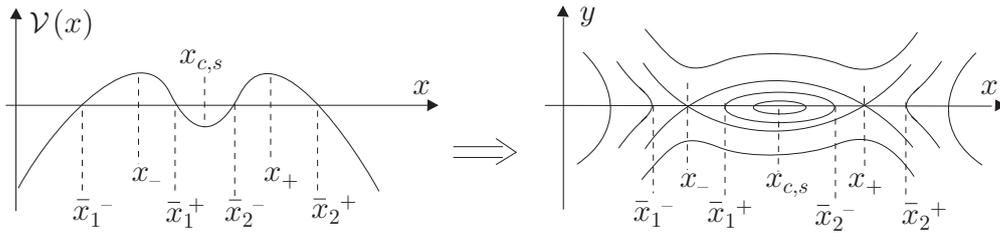
Anche in questo caso, come nel pendolo, si osserva la presenza di due traiettorie congiungenti i punti di equilibrio ma, oltre ad esse e ai due equilibri, in questo caso vi sono anche quattro traiettorie "aperte" verso infinito.

Le varie evenienze si presentano a seconda dei diversi valori della costante

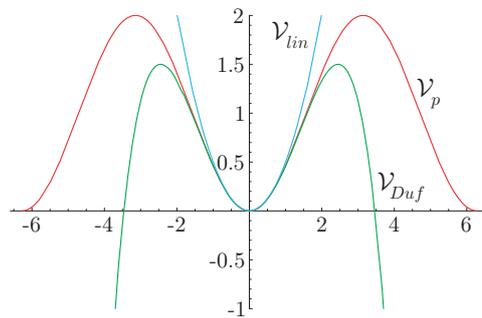
$$\mathcal{E}_0 := \frac{1}{2}y_0^2 + \frac{k^2}{2}x_0^2 - \frac{\varepsilon}{4}x_0^4.$$

Esse si possono suddividere nei seguenti casi (sempre con $\tilde{\mathcal{V}} = 0$) ed in corrispondenza ad altrettanti gruppi di valori iniziali. Si chiamino \bar{x}_1^- ed \bar{x}_2^+ la minore e la maggiore delle soluzioni (se reali) della $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = 0$, ed $\bar{x}_1^+ < \bar{x}_2^-$ quelle intermedie (se reali). Si ha:

- (1) $\mathcal{E}_0 \in (-\infty, 0)$. In tal caso, se $x_0 \leq \bar{x}_1^-$ (o, rispettivamente $x_0 \geq \bar{x}_2^+$) si avrà $x(t) \leq \bar{x}_1^-$ (oppure $x(t) \geq \bar{x}_2^+$) per ogni t . Si presentano cioè due famiglie di traiettorie per le quali la x presenta al più una inversione di moto.
- (2) $\mathcal{E}_0 = 0$. Lo stesso come al punto precedente. In più, se $x_0 = x_{c,s} = 0$, si ha la soluzione $x(t) = x_{c,s}$.
- (3) \mathcal{E}_0 un valore nell'intervallo aperto $(0, k^4/4\varepsilon)$. Lo stesso come (1). In più, per condizioni x_0 tali che $x_0 \in [\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^-]$, si hanno moti periodici con $x(t) \in [\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^-]$, e quindi per essi infinite inversioni di moto.
- (4) $\mathcal{E}_0 > (k^4/4\varepsilon)$. Qualunque sia il valore di x_0 si hanno moti progressivi con nessuna inversione.
- (5) Risultati analoghi all'esempio precedente qualora $\mathcal{E}_0 = k^4/4\varepsilon$.



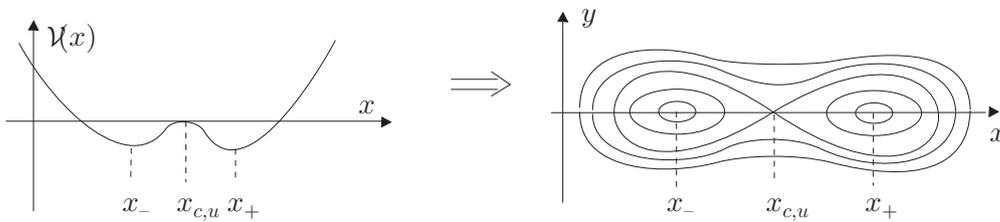
È interessante confrontare l'energia potenziale di quest'ultima $\mathcal{V}_{lin,D}(x) = k^2 x^2/2$ con lo sviluppo, valido per piccole ampiezze, dell'energia potenziale del pendolo: $\mathcal{V}_p(x) = -k^2 \cos x \simeq k^2 (-1 + x^2/2 - x^4/4!)$, della quale il primo troncamento è: $\mathcal{V}_{lin,p} = k^2 x^2/2$, valido in particolare per l'oscillatore lineare dell'Esercizio 2.1



Tuttavia va detto che la similitudine fra questi sistemi non è sufficiente a provare che l'uno "approssimi" l'altro. Tale approssimazione infatti va esaminata in modo più preciso e solo dopo aver dimostrato che anche le corrispondenti ampiezze massime rimangono piccole. Solo in tal modo, e sempre che $\varepsilon = k^2/3!$, si può sostenere che l'equazione di Duffing "prossimi" il pendolo e che lo faccia "meglio" dell'equazione lineare. Certo occorre, inoltre, che entrambi i valori $\sqrt{k^2/\varepsilon} \equiv \sqrt{3!}$ e π siano definitivamente lontani dall'insieme dei valori possibili per la x , e cioè l'insieme $|x| \leq \bar{x} \ll 1$. \square

Esempio 2.15 L'equazione di Duffing con potenziale a due pozzi:

$$\ddot{x} = +k^2 x - \varepsilon x^3 \quad \text{con} \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0 .$$



A proposito degli esempi precedenti, e allo scopo di approfondire lo studio del comportamento dei sistemi conservativi nell'intorno dei loro punti di equilibrio, è conveniente ora richiamare (vedi: [Arnold 1]) i seguenti risultati. \square

Lemma 2.16 [di Hadamard] Sia $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa \in C^{r \geq 1}(\mathcal{N}(0))$, e $\kappa(0) = 0$. Per ciascun $x \in \mathcal{N}(0)$ si può porre

$$\kappa(x) = \int_0^x \kappa'(\xi) d\xi = \int_0^1 x \kappa'(tx) dt =: x \rho(x) \quad \text{con} \quad \rho \in C^{r-1}(\mathcal{N}(0)) .$$

In particolare si ha che $\rho(0) = \kappa'(0) \equiv \int_0^1 \kappa'(0) dt$. □

Sia $\mathcal{V} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \in C^{r \geq 2}(\mathcal{N}(0))$, e si assuma che essa rappresenti una funzione energia potenziale $\mathcal{V}(x) = -\int^x f(\xi) d\xi$ di un sistema: $\ddot{x} = f(x)$. Si assuma anche che essa abbia un punto di stazionarietà il quale, senza ledere la generalità, si porrà nell'origine; si abbia cioè $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}'(0) \equiv f(0) = 0$. Si ponga poi:

$$\mathcal{V}(x) = \int_0^1 x \mathcal{V}'(tx) dt , \quad \text{insieme con} \quad \mathcal{V}'(tx) = \int_0^1 tx \mathcal{V}''(\sigma tx) d\sigma .$$

Per ogni $x \in \mathcal{N}(0)$ risulta pertanto

$$\mathcal{V}(x) = x^2 \varphi(x) := x^2 \int_0^1 t \int_0^1 \mathcal{V}''(\sigma tx) d\sigma dt ,$$

ed è $\varphi \in C^{r-2}(\mathcal{N}(0))$ con

$$\varphi(0) = \int_0^1 t \left(\int_0^1 \mathcal{V}''(0) d\sigma \right) dt = \mathcal{V}''(0) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \mathcal{V}''(0) .$$

Sia $\mathcal{V}''(0) \neq 0$; in tal caso il punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ dell'equazione $\ddot{x} = f(x)$ si definisce *di equilibrio regolare*, e la funzione $x \mapsto f(x) = -\mathcal{V}'(x)$ risulta (nulla in zero ed) invertibile in un conveniente intorno $\mathcal{N}(0)$. Si osservi, a questo riguardo, che i risultati che seguono sono validi *localmente*, ma ciò solo nella misura in cui è locale l'invertibilità della f e cioè la permanenza del segno della \mathcal{V} ; l'intorno $\mathcal{N}(0)$ non è necessariamente "piccolo", ed i risultati non sono tanto più veri quanto più $\mathcal{N}(0)$ è piccolo, come viceversa accade nel caso dei procedimenti di linearizzazione. Sotto le dette ipotesi, e posto

$$\sigma := \text{sign } \varphi(0) = \frac{\mathcal{V}''(0)}{|\mathcal{V}''(0)|} ,$$

si osserva innanzi tutto che la funzione

$$\xi^2 : x \mapsto \xi^2(x) := 2\sigma \mathcal{V}(x) \equiv 2\sigma x^2 \varphi(x)$$

è continua, nulla in $x = 0$, e positiva in $\mathcal{N}(0) \setminus \{0\}$. In secondo luogo, si riconosce facilmente che la funzione

$$\xi : x \mapsto \xi(x) := x \sqrt{2\sigma \varphi(x)} \equiv (\text{sign } x) \sqrt{2\sigma \mathcal{V}(x)}$$

ha lo stesso segno della x ed è derivabile ed invertibile in $\mathcal{N}(0)$. Essa infatti, ed altrettanto accade alla $\sigma\mathcal{V}' = -\sigma f$, ha derivata strettamente positiva:

$$\frac{d\xi}{dx} = \begin{cases} (\text{sign } x) \frac{d}{dx} \sqrt{2\sigma\mathcal{V}(x)} = \frac{\sigma\mathcal{V}'(x)}{(\text{sign } x) \sqrt{2\sigma\mathcal{V}(x)}} = \frac{-\sigma f(x)}{\xi(x)} & \text{per } x \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x) - \xi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{2\sigma\varphi(x)}}{x} = \sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)} & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Inoltre si ha che $(\text{sign } x) \sigma\mathcal{V}'(x) = |\mathcal{V}'(x)|$, e quindi:

$$\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{(\mathcal{V}'(x))^2}{2\sigma \int_0^x \mathcal{V}'(\xi) d\xi}} \quad \xrightarrow[0]{x} \quad \left[\sqrt{\frac{\mathcal{V}'(x)\mathcal{V}''(x)}{\sigma\mathcal{V}'(x)}} \right]_0 = \sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)}.$$

Pertanto, la trasformazione

$$\psi^{-1} : \mathcal{N}(0,0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi^{-1}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x\sqrt{2\sigma\varphi(x)} \\ y \end{pmatrix}$$

rappresenta una trasformazione di coordinate locale di classe C^{r-2} : $\psi : \mathcal{N}(0,0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{N}'(0,0) \subset \mathbb{R}^2$. Infatti ψ^{-1} trasforma $(0,0)$ in $(0,0)$, ed ha derivata non singolare in $(0,0)$, in quanto vale

$$\partial\psi^{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In più, ricorrendo al N.B. 1.10, il sistema trasformato è ancora conservativo con energia potenziale data da

$$\tilde{\mathcal{V}}(\xi) = \mathcal{V}(x(\xi)) = \sigma \frac{\xi^2}{2}.$$

Alternativamente, ci si può servire dell'espressione $\partial_x \xi^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma f(x)/\xi(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per calcolare esplicitamente il campo trasformato $\nu(\xi)$ e riconoscere che

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \text{è equivalente a} \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma\eta/\xi \\ 1 \end{pmatrix} f(x(\xi)),$$

per il quale è facile constatare che

$$D_\nu \left(\frac{\eta^2}{2} + \sigma \frac{\xi^2}{2} \right) = \left(\eta - \sigma^2 \xi \frac{\eta}{\xi} \right) f(x(\xi)) \equiv 0.$$

Si osservi che il sistema equivalente, non lineare, ha la stessa equazione associata del sistema (lineare)

$$\dot{\xi} = +\eta \quad \text{con} \quad \dot{\eta} = -\sigma\xi$$

e quindi ha localmente le stesse traiettorie di questo. Si osservi anche che la linearizzazione adoperata la coordinata $\xi^{lin} := x\sqrt{|\mathcal{V}''(0)|}$.

In definitiva in $\mathcal{N}(0,0)$, e cioè localmente vicino ad un punto di equilibrio regolare $x_e =: (x_c, 0)$, le curve di livello della $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{V}(x)$ sono diffeomorfe a:

(i) *Ellissi*: $\frac{\eta^2}{2} + \frac{\xi^2}{2} = \mathcal{E}_0$ se $\mathcal{V}''(0) > 0$,

e cioè se $x_c = x_{c,s} = 0$ è un punto di *minimo relativo proprio* per $\mathcal{V}(x)$;

(ii) *Iperboli*: $\frac{\eta^2}{2} - \frac{\xi^2}{2} = \mathcal{E}_0$ se $\mathcal{V}''(0) < 0$,

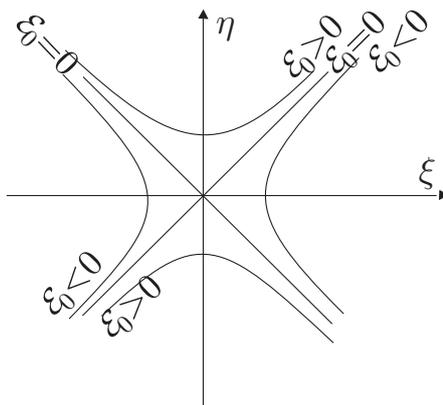
e cioè se $x_c = x_{c,u} = 0$ è un punto di *massimo relativo proprio* per $\mathcal{V}(x)$.

Nel secondo caso gli asintoti dell'iperbole sono individuati dalla relazione:

$$\partial\psi^{-1} \Big|_0 \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ w_{\pm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi dalla} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{V}''(0)|}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ w_{\pm} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che essi hanno equazione

$$\pm \sqrt{|\mathcal{V}''(0)|} u_{\pm} = w_{\pm} \quad \text{ovvero} \quad y = \pm \sqrt{|\mathcal{V}''(x_{c,u})|} (x - x_{c,u}).$$



N.B. 2.17 Il risultato (i) conferma il più generale:

Un sistema conservativo bidimensionale ha periodiche tutte le orbite vicine ad un punto di equilibrio stabile isolato. Quest'ultimo prende il nome di Centro. \diamond

N.B. 2.18 Se \mathcal{V} è definita su tutto \mathbb{R} ed è inferiormente limitata, non lede la generalità supporre ovunque positiva o nulla, e quindi ogni valore $\mathcal{T}_0 + \mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_0$ risulta positivo o nullo. Si supponga che la soluzione sia definita per $|t - t_0| \leq \tau \in \mathbb{R}$. In virtù della $\dot{x} = \pm \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}$ si ha allora che per $|t - t_0| \leq \tau$ risulta anche $|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}$. Pertanto $|x(t) - x_0| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}|t - t_0| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}\tau$. Il teorema del prolungamento delle soluzioni garantisce allora che la soluzione $t \mapsto x(t)$ è definita e limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il risultato sulla limitatezza si può anche estendere al caso: \mathcal{V} definita ed inferiormente limitata su $D \subset \mathbb{R}$ connesso. \diamond

N.B. 2.19 Ancora nel caso (i), sia $x_{c,s}$ il punto di minimo per \mathcal{V} , e si chiami \mathcal{V}_s il valore minimo $\mathcal{V}(x_{c,s}) \geq 0$. Per \mathcal{E}_0 sufficientemente prossimo a \mathcal{V}_s l'area della corrispondente curva di fase, (che è diffeomorfa alla circonferenza $\xi^2 + \eta^2 = 2\mathcal{E}_0$) è prossima a

$$S(\mathcal{E}_0) = \frac{\pi(\sqrt{2\mathcal{E}_0})^2}{\det(\partial\psi|_{x_{c,s}})} = \frac{2\pi\mathcal{E}_0}{\sqrt{|\mathcal{V}''(x_{c,s})|}}.$$

Pertanto il periodo delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile è dato da $T = 2\pi/\sqrt{|\mathcal{V}''(x_{c,s})|}$. Per il pendolo, $\mathcal{V}'' = k^2 \cos x$ implica $T = 2\pi/k$. \diamond

Si osservi che il caso (ii) è un caso particolare, in quanto il sistema ha dimensione due ed $x_e := (x_c, u, 0)$, della più generale definizione che qui segue e che è valida anche per sistemi di dimensione $n \geq 2$.

Sella standard := un punto di equilibrio x_e , isolato sulla varietà delle fasi \mathbb{M} , che ammette un intorno $\mathcal{N}(x_e) \subseteq \mathbb{M}$ nel quale si possono definire due sottovarietà (non vuote) W_{loc}^s, W_{loc}^u con le seguenti caratteristiche (sia \mathcal{G}^t l'evolutore dei punti di \mathbb{M})

(i) W_{loc}^s, W_{loc}^u sono trasversali in x_e , e lo sono in modo tale che

$$W_{loc}^s \cap W_{loc}^u = \{x_e\}; \quad T_{x_e} W_{loc}^s \oplus T_{x_e} W_{loc}^u = T_{x_e} \mathbb{M};$$

(ii) W_{loc}^s è positivamente invariante, W_{loc}^u è negativamente invariante, ovvero:

$$\begin{cases} x \in W_{loc}^s \Rightarrow \mathcal{G}^t x \in W_{loc}^s & \text{per ogni } t \geq 0, \\ x \in W_{loc}^u \Rightarrow \mathcal{G}^t x \in W_{loc}^u & \text{per ogni } t \leq 0, \end{cases}$$

(iii) W_{loc}^s (rispettivamente W_{loc}^u) è l'unico sottoinsieme di $\mathcal{N}(x_e)$ che sia positivamente (risp. negativamente) invariante, e cioè ogni orbita uscente da punti non appartenenti a W_{loc}^s (rispettivamente W_{loc}^u) esce prima o poi da $\mathcal{N}(x_e)$, (risp. proviene dal complementare di $\mathcal{N}(x_e)$); in sintesi:

$$\begin{cases} \mathcal{G}^t x \in \mathcal{N}(x_e), \quad \forall t > 0 \Rightarrow x \in W_{loc}^s, \\ \mathcal{G}^t x \in \mathcal{N}(x_e), \quad \forall t < 0 \Rightarrow x \in W_{loc}^u, \end{cases}$$

(iv) il punto x_e è l'insieme ω -limite della W_{loc}^s e l' α -limite della W_{loc}^u ; e cioè

$$\begin{cases} x \in W_{loc}^s \Rightarrow \mathcal{G}^t x \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x_e, \\ x \in W_{loc}^u \Rightarrow \mathcal{G}^t x \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} x_e, \end{cases}$$

Più in generale, si chiama:

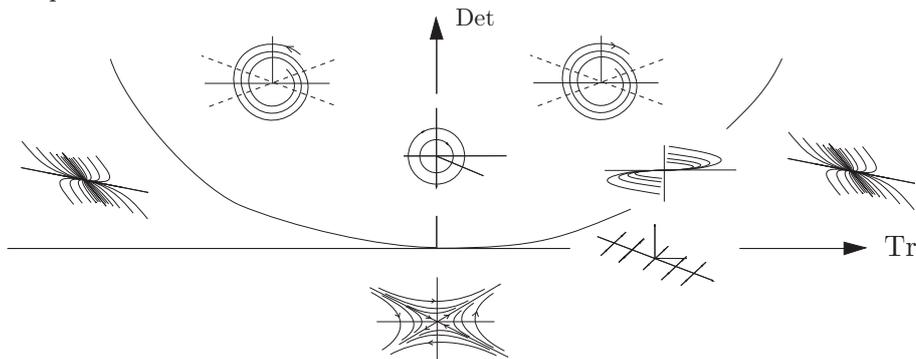
Sella (k) := un punto di equilibrio $x_e \in \mathbb{M}$ per il quale: $\begin{cases} k = \dim W_{loc}^u \\ n - k = \dim W_{loc}^s \end{cases}$

con $k \geq 0$, e dove $n = \dim \mathcal{N}(x_e) \geq 2$ è la dimensione della varietà delle fasi \mathbb{M} .

Si noti che le due varietà sono *locali*; risultano infatti definite (come grafico di *funzioni* regolari di punti nei corrispondenti spazi $\mathbb{E}_s := T_{x_e} W_{loc}^s$ ed $\mathbb{E}_u := T_{x_e} W_{loc}^u$) solo su $\mathcal{N}(x_e)$.

Un campo lineare: $A(x - x_e)$ al quale corrisponde, in coordinate, un'equazione lineare del tipo $\dot{x} = A(x - x_e)$, ha punto di equilibrio x_e che è una sella (k) quando l'operatore A ha autovalori tutti con parti reali non nulle e, di queste, k positive ed $n - k$ negative. In tal caso il punto si dice iperbolico. I corrispondenti diagrammi di fase sono riassunti, nel caso $Dim = 2$, dal seguente grafico riassuntivo, tracciato nel piano (*Traccia, Determinante*) dell'operatore A .

In esso i diagrammi indicati sono globali per il sistema lineare; verrà poi ricordato che *ad eccezione del caso* $\Re \lambda = 0$ essi sono anche "simili", per ogni t , ma solo localmente intorno al punto di equilibrio x_e a quelli del sistema non lineare $\dot{x} = v(x)$ con $v(x_e) = 0, \partial_x v(x_e) = A$. In tale affermazione si devono considerare simili i nodi e le spirali; si tratta cioè di una semplice similitudine qualitativa.



N.B. 2.20 Si chiama: *persistenza delle selle- k relativamente ad una famiglia \mathbb{F} di campi* il fatto che un certo punto x_e non solo sia di equilibrio per una qualunque delle equazioni $\dot{x} = f(x)$, con f in \mathbb{F} , ma in particolare che esso *sia una sella- k* , e con uno (stesso) k , per ciascuno di essi. Qui sopra si vede che tale persistenza sussiste relativamente a campi lineari autonomi ed aventi le $\Re e \lambda$ tutte non nulle e con la stessa segnatura. In tal senso si ha che nodi e fuochi, purché con le stesse caratteristiche di stabilità, sono “indistinguibili”.

D'altra parte, sussiste il Teorema di *persistenza delle selle* o della varietà stabile, nel quale è provato che sono Selle (k) anche i punti di equilibrio di sistemi non lineari autonomi purché aventi derivata $\partial_x v(x_e)$ con le stesse proprietà enunciate per l'operatore A , e cioè autovalori con $\Re e \lambda \neq 0$ (o, se periodica, con esponenti caratteristici: $\Re e \eta \neq 0$), e parte perturbativa continua, anche non lineare, purché opportunamente piccola.

Per essi si definiscono le corrispondenti varietà globali (non necessariamente sottovarietà regolari di \mathbb{M}) prolungando l'unione delle traiettorie uscenti dai punti di quelle locali, considerati come punti iniziali:

$$\begin{aligned} W^u(x_e) &= \cup_{t \geq 0} \mathcal{G}^t(W_{\text{loc}}^u(x_e)) \\ W^s(x_e) &= \cup_{t \leq 0} \mathcal{G}^t(W_{\text{loc}}^s(x_e)) . \end{aligned} \quad \diamond$$

Esempio 2.21
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^3 - y, \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Si ha subito $x(t) = x_0 e^t$ e quindi

$$y(t) = e^{-t} \left(\int_0^t x_0^3 e^{4\sigma} d\sigma + y_0 \right) = \frac{1}{4} x_0^3 e^{3t} + \left(y_0 - \frac{1}{4} x_0^3 \right) e^{-t} .$$

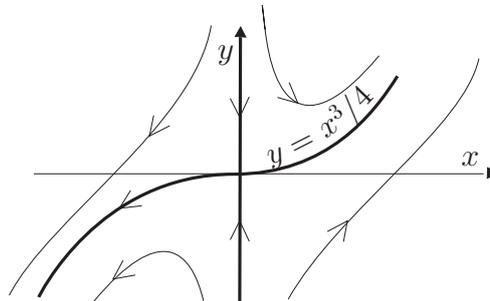
Pertanto: $W_{\text{loc}}^s \{(x, y) \mid x = 0\}$ e $W_{\text{loc}}^u = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{4} x^3\}$. Infatti:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\Rightarrow x(t) = 0, & \text{ed} & \quad y_0 = \frac{1}{4} x_0^3 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{4} x^3(t); \\ x_0 \neq 0 &\Rightarrow x(t) \xrightarrow{t} \infty, & \text{ed} & \quad y_0 \neq \frac{1}{4} x_0^3 \Rightarrow y(t) \xrightarrow{-\infty} \infty; \\ x_0 = 0 &\Rightarrow (x^2 + y^2) \xrightarrow{t} 0, & \text{ed} & \quad y_0 = \frac{1}{4} x_0^3 \Rightarrow (x^2 + y^2) \xrightarrow{-\infty} 0. \end{aligned}$$

Anzi le due varietà trovate in questo esempio sono globali, in quanto definite ovunque e verificanti (i)–(iv) anche fuori da $\mathcal{N}(0, 0)$. Come si è accennato, la parte lineare del sistema ha anch'essa due varietà (anzi due spazi) trasversali nel punto di equilibrio: $\mathbb{V}^s = \{(x, y) \mid x = 0\}$, e $\mathbb{V}^u = \{(x, y) \mid y = 0\}$; quest'ultimo è tangente, nell'equilibrio, alla W_{loc}^u del sistema non lineare ed in questo senso, per $\|x\|$ convenientemente piccoli, può essere considerata come deformata della W_{loc}^u del sistema.

Si può notare che il sistema è hamiltoniano con $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y) := xy - \frac{1}{4} x^4 + c$ pur non essendo un sistema meccanico con l'hamiltoniana canonica $\mathcal{H} = T + \mathcal{V}$.

Quelle in figura sono le linee $\mathcal{H} = \text{cost}$

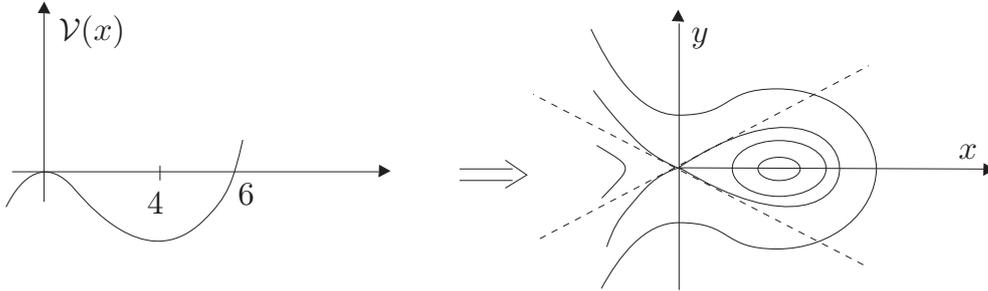


□

Esempio 2.22 $\ddot{x} = 24x - 6x^2, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{ovvero:}$

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) := y \\ \dot{y} = v^y(x, y) := 6x(4 - x) . \end{cases}$$

Gli equilibri sono $(0, 0)$ e $(4, 0)$; il potenziale $\mathcal{V}(x) = -12x^2 + 2x^3 + \tilde{\mathcal{V}}$, e la separatrice per $(0, 0)$: $y^2/2 + (-12x^2 + 2x^3) = 0$.



La separatrice è costituita da quattro orbite, tutte di periodo infinito, delle quali una: l'*omoclina* è la traiettoria che parte ed arriva in $(0, 0)$. I moti uscenti da condizioni iniziali all'interno dell'omoclina sono tutti periodici. Le traiettorie vicine all'omoclina hanno periodi

$$T = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{dx}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}} \simeq 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{dx}{\sqrt{12x^2 - 2x^3}} = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{dx}{2x\sqrt{6-x}},$$

purché siano $\bar{x}_1 \simeq \varepsilon$, $\bar{x}_2 \simeq 6 - \varepsilon$, con $0 < \varepsilon \ll 1$. Le traiettorie vicine all'equilibrio: $x = 4$ hanno invece periodo T stimato da $T \simeq 2\pi/\sqrt{|\mathcal{V}''(4)|} = 2\pi/\sqrt{24}$. \square

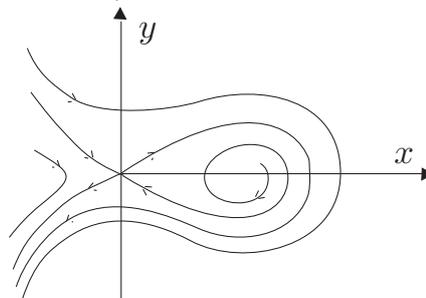
Esempio 2.23 $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y + x^2 \\ \dot{y} = y/6 - 6x(x - 4), \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Posto $f := 1/6$, e chiamato (v^x, v^y) il campo dell'Esempio 2.22, si nota che quello del presente esempio equivale a

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) - f v^y(x, y) := y - f \cdot 6x(4 - x), \\ \dot{y} = v^y(x, y) + f v^x(x, y) := 6x(4 - x) + fy. \end{cases}$$

Si riconosce che il sistema ha campo \dot{y}/\dot{x} che è "ruotato" di $\theta_f = \arctan f \in (-\pi/2, \pi/2)$ rispetto a quello definito nel precedente esempio. I cammini chiusi di quello sono quindi trasversi ai cammini di questo ed individuano regioni positivamente o negativamente invarianti (ovvero contenenti tutto il loro futuro o tutto il loro passato) a seconda del verso del campo, e cioè a seconda del segno di f .

Nel caso in esame si ha $f = 1/6 > 0$, e quindi



le traiettorie subiscono una "corrente al traverso" diretta verso quelle traiettorie dell'Esempio 2.22 che hanno energia maggiore. Viceversa, nella regione in cui le

traiettorie dell'Esempio 2.22 sono tutte cicli non isolati, le traiettorie del presente esempio contraggono (per tempi negativi) e spiralizzano verso il punto di equilibrio da esse racchiuso. \square

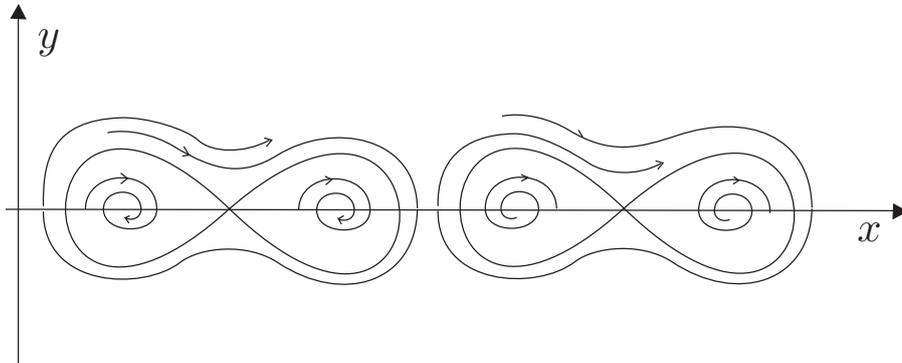
Esempio 2.24

$$(2.34) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 8x - 8x^3, \end{cases} \quad t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Come si è già visto questa è una particolare equazione di Duffing, con potenziale $\mathcal{V}(x) = -4x^2 + 2x^4 + \tilde{\mathcal{V}}$ e separatrice $\frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4 = 0$ (vedi: Esempio 2.14). Essa può allora servire di “riferimento” per discutere la seguente equazione, con $\mu \in \mathbb{R}$,

$$(2.35) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \mu \left(\frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4 \right) (8x - 8x^3) \\ \dot{y} = (8x - 8x^3) + \mu \left(\frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4 \right) y. \end{cases}$$

Infatti, stante il fatto che la funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4$ è integrale primo del sistema (2.34), e che è ad esso che il sistema (2.35) si riduce quando il dato (x_0, y_0) è tale che $\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0$, l'omoclina $\mathcal{F}(x, y) = 0$ è costituita da traiettorie anche di (2.35); per esse la \mathcal{F} è un *invariante*. Pertanto, per $\mu > 0$, e rispettivamente $\mu < 0$, si hanno i due seguenti casi:



in cui appare evidente l'esistenza di insiemi limite che non sono cicli limite.

Un altro esempio dello stesso tipo è $\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, per il quale si ha

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad D_{\mathbf{v}}\mathcal{E}(x, \dot{x}) = -\dot{x}^2(x^2 + \dot{x}^2 - 1).$$

Si hanno orbite (entranti) uscenti dalle circonferenze con centro in $(0, 0)$ solo se si è (all'esterno) all'interno del cerchio unitario. La circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, che è una orbita possibile, risulta così un “ciclo limite”. \square

In effetti, negli ultimi due esempi si è considerato il campo assegnato come “variato” di un campo conservativo. Si è già detto che questo metodo è spesso usato per intuire in primissima approssimazione l'andamento del diagramma di fase, si vedano i seguenti due esempi.

Esempio 2.25

$$\ddot{x} + \kappa(x, \dot{x}) - g(x) = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R},$$

e si assuma che κ non contenga termini additivi dipendenti solo dalla x . Si ponga, “arbitrariamente”,

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int^x g(\xi)d\xi, \quad y := \dot{x}.$$

In generale questa funzione non sarà un integrale primo; infatti (si veda il N.B. 1.7) $D_v\mathcal{E} := y\partial_x\mathcal{E} + (-\kappa + g)\partial_y\mathcal{E} = -y\kappa(x, y) \neq 0$. Tuttavia è talvolta possibile stimare il segno della $D_v\mathcal{E}$ in particolari regioni dello spazio delle fasi, e da ciò risalire, conoscendo la forma delle equipotenziali $\mathcal{E}(x, y) = \text{cost}$, al diagramma di fase del sistema (non conservativo) assegnato. Dalla definizione di $D_v\mathcal{E}$ si deduce infatti che nei punti in cui è $D_v\mathcal{E} > 0$, le linee di flusso del sistema non conservativo sono trasverse (e quindi attraversano) le linee $\mathcal{E} = \text{cost}$, puntando verso la regione nella quale le altre equipotenziali corrispondono a valori della costante *maggiori* di quello in esame. \square

Esempio 2.26

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon f_1(x, y) \\ \dot{y} = g(x) + \varepsilon f_2(x, y), \end{cases} \quad t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R},$$

con $\varepsilon \ll 1$, $f_{1,2} \in C^{r \geq 1}(D)$, $g \in C^1$.

Si ponga anche in questo caso $\mathcal{E}(x, y) := y^2/2 - \int^x g(\xi)d\xi$. Si ricava facilmente: $D_v\mathcal{E} = \varepsilon(f_2y - f_1g)$, il che mostra, come c'era da aspettarsi, che il divario fra l'arbitrario sistema “conservativo” e quello assegnato è piccolo quanto più è piccolo ε e fintanto che la norma $|x^2 + \dot{x}^2|$ rimane sufficientemente piccola da mantenere piccole le due f_1 ed f_2 . \square

I precedenti esempi tuttavia dimostrano palesemente che *non è detto che due sistemi con campi “vicini” abbiano anche diagrammi di fase “simili”*. Per convincersene ulteriormente, si considerino ancora i seguenti tre esempi.

Esempio 2.27

$$\ddot{x} + \mu|\dot{x}|\dot{x} + x = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0.$$

Con $\mathcal{E}(x, \dot{x}) := (x^2 + \dot{x}^2)/2$ risulta $D_v\mathcal{E}(x, \dot{x}) = -|\dot{x}|^3\mu \leq 0$. Si ha allora che, per quanto piccolo sia il valore di μ , le traiettorie sono trasversali e *non uscenti* dalle circonferenze con centro l'origine. In effetti sono entranti ovunque ad eccezione dei punti sull'asse delle x , nei quali esse sono tangenti alle circonferenze. Ma allora, siccome questi non sono equilibri, il teorema di unicità assicura che la stessa traiettoria prosegue nel semipiano opposto e, per continuità, non può che definitivamente entrare nella circonferenza cui era tangente sull'asse. Inoltre la traiettoria non può terminare in alcun punto diverso dall'origine, perché è definita e finita per ogni t . D'altra parte non può ammettere un ciclo limite, perché non essendo le circonferenze orbite possibili si avrebbero delle curve chiuse almeno parzialmente uscenti da qualche circonferenza.

In definitiva il punto di equilibrio attrae tutte le orbite, così come le respingerebbe se fosse $\mu < 0$, e ciò a prescindere dal suo valore assoluto, seppur piccolo.

Il metodo però non permette di stabilire il numero di giri che la traiettoria compie intorno al punto fisso, e cioè il numero di inversioni del moto effettivo. \square

Esempio 2.28 Il pendolo con attrito.

$$\ddot{q} = -k^2 \sin q - \mu \dot{q} \quad (t_0, q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad \mu > 0 .$$

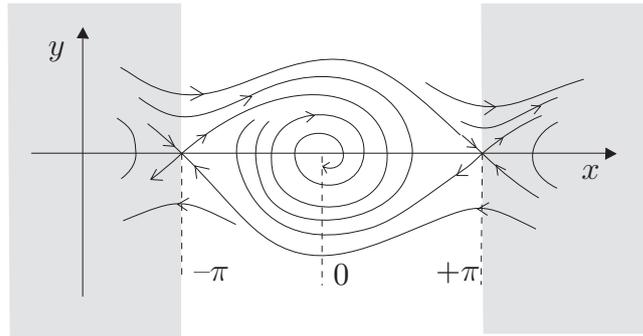
Scelte le coordinate in modo tale che $(q, \dot{q}) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e posto

$$\mathcal{E}(x, y) := \frac{1}{2} \dot{x}^2 - k^2 \cos x + \tilde{\mathcal{V}},$$

si ha:

$$D_v \mathcal{E}(x, y) = (k^2 \sin x) \dot{x} + \dot{x}(-k^2 \sin x - \mu \dot{x}) = \mu \dot{x}^2 \leq 0 .$$

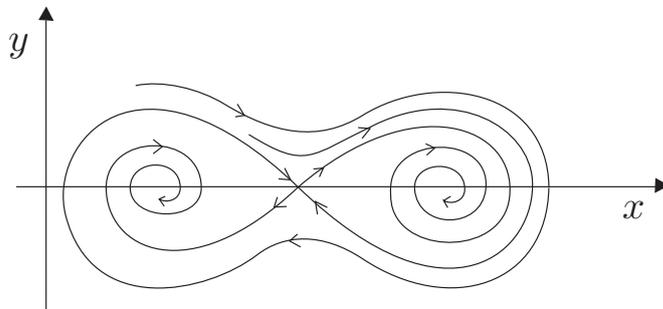
Questa proprietà è sufficiente anche in questo caso a dimostrare che il diagramma del pendolo fisico si modifica, e diviene il seguente:



\square

Esempio 2.29 L'equazione di Duffing smorzata.

$$\ddot{x} = k^2 x - x^3 - \delta \dot{x}, \quad \text{con} \quad \delta > 0 .$$



\square

È chiaro che, malgrado tali accorgimenti, non sempre la discussione è agevole:

Esempio 2.30 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}.$

Siano $g(x)$ dispari, $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$, $f(x)$ pari e tale che $f(0) < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Un caso particolare ne è la preclara

Equazione di Van der Pol:

$$\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \text{con} \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{ed } e > 0.$$

Se fosse $f = 0$, siccome la g è dispari il suo integrale è pari, e si avrebbe con semplicità che: $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int^x g(\xi)d\xi$ ha equipotenziali diffeomorfe ad ellissi o a curve chiuse regolari. Con $f \neq 0$, invece, si ha $D_{\mathbf{v}}\mathcal{E}(x, \dot{x}) = -f(x)\dot{x}^2$ che, nelle ipotesi dette, risulta negativo fuori da una certa *striscia* $(-\tilde{x}, \tilde{x})$ e positivo in una qualche altra *striscia* interna ad essa. Pertanto anche se le curve $\mathcal{E} = \text{cost}$ sono chiuse, l'informazione fornita dalla funzione \mathcal{E} e dal segno della sua derivata direzionale non basta a trarre conclusioni sull'andamento delle curve di fase. (Diverso sarebbe il caso in cui fosse $f = f(x, \dot{x})$ con f positiva fuori da qualche rettangolo contenente l'origine, e negativa dentro, sul quale magari poter usare il teorema di Poincaré-Bendixon). Nelle ipotesi dette si ha infatti bisogno di un teorema specifico, ed affatto banale: il teorema di Lienard, per provare che questa equazione ammette un (solo) ciclo limite purché la funzione $\int^x f(\xi)d\xi$ (che è dispari) si annulli (solo) nei punti $\{-a, 0, +a\}$, con $a > \tilde{x}$. \square