# Terzo appello, Ing. energetica, 2013-14, soluzioni

23.09.2014

## Compito A

### Esercizio 1

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delimitato dalla semisfera centrata nell'origine di raggio 2 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$, e dalla porzione di paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 4, z \leq 0\}$.

Parametrizzare $\partial\Omega$ e scriverne (dove possibile) versore normale uscente e piano tangente.

Scrivere in particolare versore normale uscente e piano tangente nei punti

$$P = (0, 0, 2), \quad Q = (0, 0, -4).$$

Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x, 1, 1)$$

uscente dal bordo di $\Omega$, svolgendo sia un integrale triplo che un integrale di superficie.

#### Soluzione

Il bordo di $\Omega$ è costituito da due componenti $\Sigma_1, \Sigma_2$, rispettivamente un emisfero ed una porzione di paraboloide.

Una possibile parametrizzazione del bordo di $\Omega$ è data dalle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 : \quad & (x, y, z) = \sigma_1(\varphi, \vartheta) = (2\cos\varphi\sin\vartheta, 2\sin\varphi\sin\vartheta, 2\cos\vartheta), \\
& \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\
& \sigma_{1,\vartheta} = (2\cos\varphi\cos\vartheta, 2\sin\varphi\cos\vartheta, -2\sin\vartheta), \\
& \sigma_{1,\varphi} = (-2\sin\varphi\sin\vartheta, 2\cos\varphi\sin\vartheta, 0). \\
\Sigma_2 : \quad & (x, y, z) = \sigma_2(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 4), \\
& (x, y) \in B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}, \\
& \sigma_{2,x} = (1, 0, 2x), \\
& \sigma_{2,y} = (0, 1, 2y).
\end{aligned}$$

Versori normali e piano tangente a $\partial\Omega$ in $(x_0, y_0, z_0) = \sigma_1(\varphi_0, \vartheta_0) \in \Sigma_1$:

$$
\begin{aligned}
&n_1 = \frac{1}{2}\,\sigma_1(\varphi_0, \vartheta_0),\\
&\pi_1 :\ \cos\varphi_0 \sin\vartheta_0(x - x_0) + \sin\varphi_0 \sin\vartheta_0(y - y_0) + \cos\vartheta_0(z - z_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Versori normali e piano tangente a $\partial\Omega$ in $(x_0, y_0, z_0) = \sigma_2(x_0, y_0) \in \Sigma_2$:

$$
\begin{aligned}
&n_2 = \frac{1}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2 + 1}}(2x_0, 2y_0, -1),\\
&\pi_2 :\ 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y0) - (z - z0) = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi, piano tangente e versori normali nei punti $P$ e $Q$ sono dati da

$$
\begin{aligned}
&P \in \Sigma_1, \quad P = \sigma_1(\overline{\varphi}, 0) && \Rightarrow && n_P = (0, 0, 1),\\
& && && \pi_P : z - 2 = 0.\\
&Q \in \Sigma_2, \quad Q = \sigma_2(0, 0) && \Rightarrow && n_Q = n_2(0, 0) = (0, 0, -1),\\
& && && \pi_Q : z + 4 = 0.
\end{aligned}
$$

Dalla definizione, il flusso uscente da $\partial\Omega$ può essere ottenuto calcolando i seguenti integrali.

$$
\iint_{\partial\Omega} F \cdot n_{est}\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} F \cdot n_1\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} F \cdot n_2\, d\sigma.
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} F \cdot n_1\, d\sigma &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} (2\cos\varphi \sin\vartheta, 1, 1) \cdot (4\cos\varphi \sin^2\vartheta, 4\sin\varphi \sin^2\vartheta, 4\sin\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi,\\
&=4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \left[2\cos^2\varphi \sin^3\vartheta + \sin\varphi \sin^2\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\right],\\
&=\frac{28}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} F \cdot n_2\, d\sigma &= \iint_{B_2} (x, 1, 1) \cdot (2x, 2y, -1)\, dx\, dy,\\
&= \iint_{B_2} (2x^2 + 2y - 1)\, dx\, dy,\\
&= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, (2\rho^3 \cos^2\vartheta + 2\rho^2 \sin\vartheta - \rho),\\
&=4\pi.
\end{aligned}
$$

Applicando il teorema della divergenza, si può calcolare il flusso anche mediante l'integrale

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \iint_{B_2}\int_{x^2+y^2-4}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz,\\
&= \iint_{B_2}\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-x^2-y^2+4\right)\,dx\,dy,\\
&= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\,\rho(\sqrt{4-\rho^2}-\rho^2+4),\\
&= \frac{40}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

Gli integrali non svolti esplicitamente possono essere calcolati facendo uso di

$$
\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt, \quad \int \sin^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt,
$$

$$
\int \cos t\, f(\sin t)\,dt \overset{s=\sin t}{=} \int f(s)\,ds, \quad \int \sin t\, f(\cos t)\,dt \overset{s=\cos t}{=} -\int f(s)\,ds,
$$

$$
\int \sin^3 t\,dt = \int \sin t(1-\cos^2 t)\,dt
$$

$$
\int t\sqrt{4-t^2}\,dt = -\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}.
$$

## Esercizio 2

Sia data la funzione $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$.

Studiare i punti critici di $f$ e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio e nel triangolo chiuso $T$ di vertici $(1,0), (0,1)$ e $(0,0)$.

### Soluzione

La funzione $f$ è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Dato che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, $f$ è illimitata. Quindi non ha massimo né minimo globale, e gli estremi superiore ed inferiore valgono rispettivamente $+\infty$, e $-\infty$.

Il gradiente di $f$ è uguale a

$$
\nabla f(x,y) = (3x^2 - y, 2y - x),
$$

e si avranno punti critici in corrispondenza delle soluzioni del sistema

$$
\begin{cases} 3x^2 - y = 0, \\ 2y - x = 0, \end{cases}
$$

ovvero nei punti

$$
P = (0,0), \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right).
$$

Per studiare la natura di questi punti, calcoliamo l'hessiano di $f$, che risulta essere pari a

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\mathrm{H}\, f(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\big(\mathrm{H}\, f(P)\big) < 0,$$
$$\mathrm{H}\, f(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\big(\mathrm{H}\, f(Q)\big) > 0,\ \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}\, f(Q)\big) > 0$$

quindi i punti $P$ e $Q$ risultano essere rispettivamente di sella e di minimo relativo.

Essendo $T$ un insieme compatto ed $f$ una funzione continua, questa avrà in $T$ massimo e minimo globale. All'interno di $T$ l'unico punto candidato ad essere di estremo globale è $Q$.

Per quanto riguarda $\partial T$, questa può essere parametrizzata dalle 3 curve

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t,0), && t \in [0,1], \\ \gamma_2(t) &= (t,-t+1), && t \in [0,1], \\ \gamma_3(t) &= (0,t), && t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Su di esse $f$ vale

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_1(t) &= t^3, \\ f \circ \gamma_2(t) &= t^3 + 2t^2 - 3t + 1, \\ f \circ \gamma_3(t) &= t^2. \end{aligned}$$

Andando a derivare le funzioni $f \circ \gamma_i(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} [f \circ \gamma_1]'(t) &= 3t^2, \\ [f \circ \gamma_2]'(t) &= 3t^2 + 4t - 3, \\ [f \circ \gamma_3]'(t) &= 2t. \end{aligned}$$

Da queste derivate si può vedere che $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_3$ sono crescenti nel loro dominio, e quindi prive di punti estremanti interni, $f \circ \gamma_2$ ha un punto di minimo relativo in $(\sqrt{13}-2)/3$, corrispondente al punto $R = \big((\sqrt{13}-2)/3, (5-\sqrt{13})/3\big)$.

Confrontando il valore che $f$ assume in $Q, R$ e nei punti $A = (1,0), B = (0,1)$ e $C = (0,0)$, si ottengono come valori di massimo e minimo globale per $f$ in $T$ pari a 1, assunto in $A$, e $B$, e $-1/(2^4 \cdot 3^3)$, assunto in $Q$.

# Compito B

## Esercizio 1

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delimitato dalla semisfera centrata nell'origine di raggio 3 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 9, z \geq 0\}$, e dalla porzione di paraboloide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2-9, z \leq 0\}$.

Parametrizzare $\partial\Omega$ e scriverne (dove possibile) versore normale uscente e piano tangente.

Scrivere in particolare versore normale uscente e piano tangente nei punti

$$P = (0, 0, 3), \quad Q = (0, 0, -9).$$

Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (1, y, 1)$$

uscente dal bordo di $\Omega$, svolgendo sia un integrale triplo che un integrale di superficie.

**Soluzione**

Il bordo di $\Omega$ è costituito da due componenti $\Sigma_1, \Sigma_2$, rispettivamente un emisfero ed una porzione di paraboloide.

Una possibile parametrizzazione del bordo di $\Omega$ è data dalle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 : \quad & (x, y, z) = \sigma_1(\varphi, \vartheta) = (3\cos\varphi\sin\vartheta, 3\sin\varphi\sin\vartheta, 3\cos\vartheta),\\
& \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\\
& \sigma_{1,\vartheta} = (3\cos\varphi\cos\vartheta, 3\sin\varphi\cos\vartheta, -3\sin\vartheta),\\
& \sigma_{1,\varphi} = (-3\sin\varphi\sin\vartheta, 3\cos\varphi\sin\vartheta, 0).\\
\Sigma_2 : \quad & (x, y, z) = \sigma_2(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 9),\\
& (x, y) \in B_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\},\\
& \sigma_{2,x} = (1, 0, 2x),\\
& \sigma_{2,y} = (0, 1, 2y).
\end{aligned}$$

Versori normali e piano tangente a $\partial\Omega$ in $(x_0, y_0, z_0) = \sigma_1(\varphi_0, \vartheta_0) \in \Sigma_1$:

$$\begin{aligned}
& n_1 = \frac{1}{3}\sigma_1(\varphi_0, \vartheta_0),\\
& \pi_1 :\ \cos\varphi_0\sin\vartheta_0(x - x_0) + \sin\varphi_0\sin\vartheta_0(y - y_0) + \cos\vartheta_0(z - z_0) = 0.
\end{aligned}$$

Versori normali e piano tangente a $\partial\Omega$ in $(x_0, y_0, z_0) = \sigma_2(x_0, y_0) \in \Sigma_2$:

$$\begin{aligned}
& n_2 = \frac{1}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2 + 1}}(2x_0, 2y_0, -1),\\
& \pi_2 :\ 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y0) - (z - z0) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi, piano tangente e versori normali nei punti $P$ e $Q$ sono dati da

$$\begin{aligned}
& P \in \Sigma_1, \quad P = \sigma_1(\overline{\varphi}, 0) && \Rightarrow && n_P = (0, 0, 1),\\
& && && \pi_P : z - 3 = 0.\\
& Q \in \Sigma_2, \quad Q = \sigma_2(0, 0) && \Rightarrow && n_Q = n_2(0, 0) = (0, 0, -1),\\
& && && \pi_Q : z + 9 = 0.
\end{aligned}$$

Dalla definizione, il flusso uscente da $\partial\Omega$ può essere ottenuto calcolando i seguenti integrali.

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot n_{est}\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} F \cdot n_1\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} F \cdot n_2\, d\sigma.$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} F \cdot n_1\, d\sigma =& \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} (1, 3\sin\varphi\sin\vartheta, 1) \cdot (9\cos\varphi\sin^2\vartheta, 9\sin\varphi\sin^2\vartheta, 9\sin\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi,\\
=&9\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \big[\cos\varphi\sin^2\vartheta + 3\sin^2\varphi\sin^3\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\big],\\
=&27\pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} F \cdot n_2\, d\sigma =& \iint_{B_3} (1, y, 1) \cdot (2x, 2y, -1)\, dx\, dy,\\
=& \iint_{B_3} (2x + 2y^2 - 1)\, dx\, dy,\\
=& \int_0^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, (2\rho^2\cos\vartheta + 2\rho^3\sin^2\vartheta - \rho),\\
=&\frac{63}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Applicando il teorema della divergenza, si può calcolare il flusso anche mediante l'integrale

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =& \iint_{B_3} \int_{x^2+y^2-9}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 1\, dx\, dy\, dz,\\
=& \iint_{B_3} \left(\sqrt{9-x^2-y^2} - x^2 - y^2 + 9\right)\, dx\, dy,\\
=& \int_0^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \rho(\sqrt{9-\rho^2} - \rho^2 + 9),\\
=&\frac{117}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Gli integrali non svolti esplicitamente possono essere calcolati facendo uso di

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt, \quad \int \sin^2 t\, dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt,$$

$$\int \cos t\, f(\sin t)\, dt \overset{s=\sin t}{=} \int f(s)\, ds, \quad \int \sin t\, f(\cos t)\, dt \overset{s=\cos t}{=} -\int f(s)\, ds,$$

$$\int \sin^3 t\, dt = \int \sin t(1-\cos^2 t)\, dt$$

$$\int t\sqrt{9-t^2}\, dt = -\frac{1}{3}(9-t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

## Esercizio 2

Sia data la funzione $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$.

Studiare i punti critici di $f$ e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio e nel triangolo chiuso $T$ di vertici $(1,0), (0,1)$ e $(0,0)$.

### Soluzione

La funzione $f$ è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Dato che $\lim_{x\to\pm\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\pm\infty} y^3 = \pm\infty$, $f$ è illimitata. Quindi non ha massimo né minimo globale, e gli estremi superiore ed inferiore valgono rispettivamente $+\infty$, e $-\infty$.

Il gradiente di $f$ è uguale a

$$\nabla f(x,y) = (2x - y, 3y^2 - x),$$

e si avranno punti critici in corrispondenza delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3y^2 - x = 0, \end{cases}$$

ovvero nei punti

$$P = (0,0), \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right).$$

Per studiare la natura di questi punti, calcoliamo l'hessiano di $f$, che risulta essere pari a

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$\mathrm{H}\, f(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\big(\mathrm{H}\, f(P)\big) < 0,$$
$$\mathrm{H}\, f(Q) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\big(\mathrm{H}\, f(Q)\big) > 0,\ \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}\, f(Q)\big) > 0$$

quindi i punti $P$ e $Q$ risultano essere rispettivamente di sella e di minimo relativo.

Essendo $T$ un insieme compatto ed $f$ una funzione continua, questa avrà in $T$ massimo e minimo globale. All'interno di $T$ l'unico punto candidato ad essere di estremo globale è $Q$.

Per quanto riguarda $\partial T$, questa può essere parametrizzata dalle 3 curve

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t,0), & t &\in [0,1], \\ \gamma_2(t) &= (t,-t+1), & t &\in [0,1], \\ \gamma_3(t) &= (0,t), & t &\in [0,1]. \end{aligned}$$

Su di esse $f$ vale

$$\begin{aligned}
f \circ \gamma_1(t) &= t^2, \\
f \circ \gamma_2(t) &= -t^3 + 5t^2 - 4t + 1, \\
f \circ \gamma_3(t) &= t^3.
\end{aligned}$$

Andando a derivare le funzioni $f \circ \gamma_i(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
[f \circ \gamma_1]'(t) &= 2t, \\
[f \circ \gamma_2]'(t) &= -3t^2 + 10t - 4, \\
[f \circ \gamma_3]'(t) &= 3t^2.
\end{aligned}$$

Da queste derivate si può vedere che $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_3$ sono crescenti nel loro dominio, e quindi prive di punti estremanti interni, $f \circ \gamma_2$ ha un punto di minimo relativo in $(5-\sqrt{13})/3$, corrispondente al punto $R = \big((5-\sqrt{13})/3, (\sqrt{13}-2)/3\big)$.

Confrontando il valore che $f$ assume in $Q, R$ e nei punti $A = (1,0), B = (0,1)$ e $C = (0,0)$, si ottengono come valori di massimo e minimo globale per $f$ in $T$ pari a 1, assunto in $A$, e $B$, e $-1/(2^4 \cdot 3^3)$, assunto in $Q$.