ANALISI MATEMATICA II (Ing. Energetica)
III APPELLO 23.09.2014 A.A.2013/14

COGNOME E NOME ....N.Ro MATR. ....
LUOGO E DATA DI NASCITA ....

MOTIVARE CHIARAMENTE TUTTE LE RISPOSTE Tempo 2 ore 30 $'$ **COMPITO A**

1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delimitato dalla semisfera centrata nell'origine di raggio 2 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4, z \geq 0\}$, e dalla porzione di paraboloide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2-4, z \leq 0\}$.
Parametrizzare $\partial\Omega$ e scriverne (dove possibile) versore normale uscente e piano tangente.
Scrivere in particolare versore normale uscente e piano tangente nei punti
$$P = (0,0,2), \quad Q = (0,0,-4).$$
Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x,1,1)$
uscente dal bordo di Ω, svolgendo sia un integrale triplo che un integrale di superficie. **(8 punti)**

2) Sia data la funzione $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$.
Studiare i punti critici di f e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio ed all'interno del triangolo chiuso T di vertici $(1,0), (0,1)$ e $(0,0)$.
(8 punti)

3) Rappresentare in serie di Fourier, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica, di *periodo* $T = 2\pi$ individuata in $[-\pi,\pi)$ da
$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right|$$
Precisare, $\forall x \in [-\pi,\pi)$ il valore della somma di tale serie di Fourier. In tale intervallo la convergenza è uniforme ? E in $\mathbb{R}$? Perchè ? **Fornire adeguate motivazioni**. **(8 punti)**

4) Data la forma differenziale $$\omega = \frac{4x+\alpha}{4(x-1)^2+(y+1)^2}dx + \frac{y+1}{4(x-1)^2+(y+1)^2}dy, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

1. determinare l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$.
2. Dato il compatto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 4\right\}$, pararametrizzarne la frontiera $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$;
3. calcolare, in corrispondenza al generico valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, $I = \int_{+\partial D} \omega$;
4. verificare il risultato ottenuto mediante le formule di Green-Gauss, cioè, dopo avere parametrizzato il compatto D, calcolare un *opportuno* integrale doppio esteso a D;
5. determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che essa sia chiusa in E; in corrispondenza al valore di α determinato,
   - indicare un sottoinsieme di E nel quale ω è esatta e dire se ω è esatta o meno in E. Indicare **chiaramente** le motivazioni teoriche della risposta;
   - calcolare $\widetilde{I} = \int_{+\tilde{\gamma}} \omega$, dove $\widetilde{\gamma}$ indica il segmento che congiunge il punto $A \equiv (-1,0)$ con il il punto $B \equiv (-2,0)$ e, se possibile, verificare il valore dell'integrale $\widetilde{I}$ calcolandolo in modo alternativo al calcolo diretto.

(8 punti)

Dichiaro di avere superato l'esame di Analisi Matematica I SI NO FIRMA ....

Riservato alla Commissione di Esame

SCRITTO ________________________________

ORALE ________________________________