ANALISI MATEMATICA II (Ing. Energetica) A.A.2013/14
Esercizi sulle forme differenziali -

1) Detto $D \subset \mathbb{R}^2$ il **dominio regolare** avente come frontiera l'**ellisse**

$$\mathcal{E} : x^2 + 4(y-2)^2 = 1 \quad i.e. \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4(y-2)^2 \le 1\} \tag{0.1}$$

e γ calcolare:

$$I_1 = \int_{+\partial D} 3x^2y\,dx + x^3\,dy \quad , \quad I_2 = \int_{\gamma} 3x^2y\,dx + x^3\,dy$$

ove $+\partial D$ indica il consueto verso di percorrenza antiorario e γ coincide con l'arco di ∂D che congiunge i punti $A \equiv (1,2)$ e $B \equiv (0,3/2)$, nel verso da A a B.

L'integrale della stessa forma differenziale, esteso alla circonferenza di centro l'origine e raggio 5 assume lo stesso valore I_1: perchè?

2) Si calcoli il seguente integrale curvilineo

$$I = \int_{+\partial T} x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

ove $+\partial T$ è la frontiera, percorsa in verso antiorario, del dominio T (limitato) individuato nel piano xy dall'ellisse passante per i punti $(0,-1)$, $(0,1)$ $(-1/4,0)$ e $(1/4,0)$, simmetrica rispetto all'asse x. Verificare il risultato ottenuto mediante l'applicazione delle formule di Green-Gauss e, quindi, calcolando un opportuno integrale doppio esteso al dominio T.

3) Detto in T il dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ limitato dall'ellisse (∂T) avente come assi di simmetria gli assi coordinati del piano xy e passante per i punti $(2,0)$ e $(0,1)$, si calcoli

$$I = \int_{+\partial T} \frac{x}{x^2+4y^2}\,dx + \frac{4y}{x^2+4y^2}\,dy \ ,$$

ove $+\partial T$ indica il consueto verso di percorrenza antiorario. Calcolare l'integrale in due modi diversi e confrontare i risultati ottenuti.

4) Data la forma differenziale $\omega = \dfrac{ax^2+y^2}{x(x^2+y^2)}\,dx + \dfrac{3x^2+4y^2}{y(x^2+y^2)}\,dy$, stabilire per quali valori reali di a è esatta nel suo dominio di definizione. Per tali valori di a calcolarne un potenziale.

5) Data la forma differenziale $\omega = \dfrac{\lambda^2 y}{x^2+\lambda y^2}dx + \dfrac{(2-\lambda)x}{x^2+\lambda y^2}dy$, Determinare tutti i valori di λ tali che ω risulti esatta nel suo dominio (usare il risultato dell'esercizio 3).

6) Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+3y+y^2)\,dz,$$

dove γ è l'intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2+1=0$ e del piano $z=2y$.

7) Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\sin y + \frac{y-1}{\sqrt{x+1}}\right)\,dx + \left(x\cos y + 2\sqrt{x+1}\right)\,dy,$$

trovare il suo dominio, disegnarlo, dimostrare che ω è esatta nel suo dominio e trovare una primitiva U di ω tale che $U(0,2)=3$.