ANALISI MATEMATICA II (Ing. Aerospaziale) I canale (A–K) A.A.2012/13
Esercizi sulle forme differenziali - F. Bonghi

---

1) Dati l'insieme D e e la forma differenzialeω:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4y \leq 0,\ y \geq x\} \quad , \quad \omega = x(y-2)\,dx + x^2\,dy$$

disegnare D e calcolare $\int_{\partial D^+} \omega$ (avendo indicato con ∂D^+ la frontiera di D percorsa in senso antiorario).

2) Dire a priori se la forma differenziale $\omega = \dfrac{2x\,dx + 3\,dy}{1 + (x^2 + 3y)^2}$è esatta nel suo dominio, ed in caso trovarne le primitive.
Successivamente fare lo stesso per tutte le forme differenziali della forma

$$\omega = f(x^2 + 3y)(2x\,dx + 3\,dy), \quad \text{con} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}).$$

3) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ calcolare e disegnare il dominio D della forma differenziale e dire se sia o no chiusa $\omega = \dfrac{\lambda y^2}{x^2 + \lambda y^2}\,dx + \dfrac{(2-\lambda)x}{x^2 + \lambda y^2}\,dy$. e dire se sia o no chiusa.

4) Data la forma differenziale $\omega = \dfrac{ax^2 + y^2}{x(x^2 + y^2)}\,dx + \dfrac{3x^2 + 4y^2}{y(x^2 + y^2)}\,dy$, stabilire per quali valori reali di a è esatta nel suo dominio di definizione. Per tali valori di a calcolarne un potenziale.

5) Data la forma differenziale $\omega = \dfrac{\lambda^2 y}{x^2 + \lambda y^2}dx + \dfrac{(2-\lambda)x}{x^2 + \lambda y^2}dy$, Determinare tutti i valori di λ tali che ω risulti esatta nel suo dominio (usare il risultato dell'esercizio 3).

6) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z - 2y)\,dx + (z - 2x)\,dy + (x + 3y + y^2)\,dz,$$

dove γ è l'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ e del piano $z = 2y$.

7) Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\sin y + \frac{y-1}{\sqrt{x+1}}\right)\,dx + \left(x\cos y + 2\sqrt{x+1}\right)\,dy,$$

trovare il suo dominio, disegnarlo, dimostrare che ω è esatta nel suo dominio e trovare una primitiva U di ω tale che $U(0,2) = 3$.

8) Trovare i valori di α che rendono conservativo nel suo dominio il seguente campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y + \alpha x \cos x^2}{xy + \sin x^2}, \frac{x}{xy + \sin x^2} - 3y^2\right),$$

e, per tali valori di α, trovare i potenziali di $\mathbf{F}$.

9) Dire se e perché il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + 1, 2x - 1, 2z)$ è conservativo, ed in caso trovarne i potenziali.