

ANALISI MATEMATICA II (Ing. Aerospaziale- A-K)
VI APPELLO A.A.2010/2011 17.02.2012

COGNOME E NOME N.Ro MATR.

PROVA SCRITTA Tempo 2 ore e 30 minuti

1) Data la funzione:

$$f(x, y) = \frac{8}{5} \log(xy) + 5 [x^2 + (y - 1)^2] - 10x$$

- a) determinarne l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$, specificando se l'insieme è connesso o no, limitato o illimitato, aperto o meno; fornirne la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;
- b) data la successione $\{a_n\} = \{f(P_n)\}$, dove $P_n \equiv \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, determinarne il limite per $n \rightarrow \infty$;
- c) determinare i punti critici e classificarli;
- d) determinare $\inf f(E)$, $\sup f(E)$ e, quindi, $f(E)$.

2) Data l'equazione differenziale:

$$x^2 y'' + 3x y' + y = 0$$

per $x > 0$, determinarne l'integrale generale. Trovare, inoltre, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3x y' + y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 . \end{cases}$$

3) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2) \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$$

4) Con un opportuno cambio di variabile, calcolare

$$I = \iint_D \frac{x^2}{y} \sin(xy) dx dy .$$

5) Data la forma differenziale $\omega = y^2 dx + (x + y)^2 dy$, determinarne il dominio $E \subset \mathbb{R}^2$. Tale forma è esatta in tutto il suo dominio $E \subset \mathbb{R}^2$? Perché?

Calcolare

$$I = \int_{+\partial D} \omega \quad , \quad \text{dove} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

Dimostrare, infine, che $I = \int_{+\partial D} (x^2 + y^2) dy$.