ANALISI MATEMATICA II (Ing. Aerospaziale) ♣
I APPELLO A.A.2010/2011 08.06.2011

COGNOME E NOME .... N. MATR. ....

Se ammesso, desidererei svolgere la prova di teoria: 21-22 giugno ◯ 27 giugno ◯

PROVA SCRITTA COMPITO B Tempo 2 ore e 30 minuti

1) Data la funzione:

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x - y^2 + 9}{xy}\right),$$

a) determinarne l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$, specificando se l'insieme è connesso o no, limitato o illimitato, aperto o meno; fornirne la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;

b) data la successione $\{a_n\} = \{f(P_n)\}$, dove $P_n \equiv \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, determinarne il limite per $n \to \infty$;

c) determinare $\inf f(E)$, $\sup f(E)$ e, successivamente, $f(E)$;

d) determinare i punti critici di f, e classificarli.

2) Data l'equazione differenziale:

$$x^2\, y'' - 3x\, y' + 4y = 0$$

per $x > 0$, determinarne l'integrale generale. Trovare, inoltre, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2\, y'' - 3x\, y' + 4y = 0 \\ y(1) \ = 1 \\ y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

3) Si consideri la superficie S, contenuta nel semispazio $y \geq 0$, ottenuta facendo ruotare di un angolo piatto attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione

$$z = (2+x)^{3/2}\,, \quad 1 \leq x \leq 3\,.$$

a) Calcolare l'area di S;

b) trovare una parametrizzazione di S e utilizzarla per calcolare versore normale e piano tangente a S nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 8)$.

4) Calcolare il baricentro della regione piana

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2x\,,\ x^2 + y^2 \geq 2\}\,.$$

5) Data la forma differenziale $\omega = \dfrac{\alpha x}{(x^2+y^2)^3}dx + \dfrac{3y}{(x^2+y^2)^3}dy$, determinarne il dominio $E \subset \mathbb{R}^2$. Determinare, quindi, $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che ω sia esatta nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset E \subset \mathbb{R}^2$. Tale forma è esatta in tutto il suo dominio E? Perché? In corrispondenza al valore di α trovato, calcolare $I = \int_\gamma \omega$, dove

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = (2/t)\sin[\pi(t-1)/3] \\ y(t) = 2 + (2/t)\cos[\pi(t-1)/3] \end{cases} , \quad t \in [1, 16]$$

congiunge il punto $A \equiv (0,4)$ con il punto $B \equiv (0, 15/8)$.

Punteggi: 1) 8 punti; 2) 7 punti; 3) 7 punti; 4) 8 punti; 5) 7 punti.

Servono 15 punti per l'ammissione alla prova di teoria.