ANALISI MATEMATICA II (Ing. Aerospaziale) ♢
I APPELLO A.A.2010/2011 08.06.2011

COGNOME E NOME ....N. MATR. ....

Se ammesso, desidererei svolgere la prova di teoria: 21-22 giugno ◯ 27 giugno ◯

PROVA SCRITTA Tempo 2 ore e 30 minuti

1) Data la funzione:

$$f(x,y) = \log\left(\frac{y - x^2 + 4}{xy}\right)$$

   a) determinarne l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$, specificando se l'insieme è connesso o no, limitato o illimitato, aperto o meno; fornirne la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;
   b) data la successione $\{a_n\} = \{f(P_n)\}$, dove $P_n \equiv \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, determinarne il limite per $n \to \infty$;
   c) determinare $\inf f(E)$, $\sup f(E)$ e, successivamente, $f(E)$;
   d) determinare i punti critici di f, e classificarli.

2) Data l'equazione differenziale:

$$x^2\, y'' - x\, y' + y = 0$$

per $x > 0$, determinarne l'integrale generale. Trovare, inoltre, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2\, y'' - x\, y' + y = 0 \\ y(1) \ = 1 \\ y'(1) = 0\ . \end{cases}$$

3) Si consideri la superficie S, contenuta nel semispazio $y \geq 0$, ottenuta facendo ruotare di un angolo piatto attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione

$$z = (4-x)^{3/2}\,, \quad x \in [0,3]\,.$$

   a) Calcolare l'area di S;
   b) trovare una parametrizzazione di S e utilizzarla per calcolare versore normale e piano tangente a S nel punto $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{2})$.

4) Calcolare il baricentro della regione piana

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4y\,,\ x^2 + y^2 \geq 8\}\,.$$

5) Data la forma differenziale $\omega = -\frac{7x}{(x^2+y^2)^3}dx + \frac{\alpha y}{(x^2+y^2)^3}dy$, determinarne il dominio $E \subset \mathbb{R}^2$. Determinare, quindi, $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che ω sia esatta nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset E \subset \mathbb{R}^2$. Tale forma è esatta in tutto il suo dominio $E \subset \mathbb{R}^2$? Perché? In corrispondenza al valore di α trovato, calcolare $I = \int_\gamma \omega$ dove:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \sin\left[\pi(t-1)/4\right] \\ y(t) = t \cos\left[\pi(t-1)/4\right] \end{cases}, \qquad t \in [1, 19]$$

congiunge il punto $A \equiv (0,1)$ con il punto $B \equiv (19, 0)$.

Punteggi: 1) 8 punti; 2) 7 punti; 3) 7 punti; 4) 8 punti; 5) 7 punti.
Servono 15 punti per l'ammissione alla prova di teoria.