

ANALISI MATEMATICA II (Ing. Aerospaziale) ◇
II APPELLO A.A.2010/2011 06.07.2011

COGNOME E NOME N. MATR.
Se ammesso, desidererei svolgere la prova di teoria: 13-14 luglio ○ 18 luglio ○

PROVA SCRITTA Tempo 2 ore e 30 minuti

1) Data la funzione:

$$f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 + x^2 + 2y$$

determinare i punti critici di f , e classificarli. Scrivere, e rappresentare graficamente, il vettore ∇f nel punto $(0, -1)$. In tale punto trovare una direzione lungo la quale la derivata direzionale si annulla.

2) Data l'equazione differenziale:

$$y'' + 2\omega y' + \omega^2 y = 3e^{-\omega x},$$

determinarne, al variare di $\omega \in \mathbb{R}$, l'integrale generale. Trovare, inoltre, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2\omega y' + \omega^2 y = 3e^{-\omega x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3) Dimostrare che l'equazione

$$\operatorname{arctg}(xy) - 2xe^y - y^2 + 2y + 4 = 0$$

descrive, in un intorno del punto $(2, 0)$, il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ oppure $x = \varphi(y)$. Trovare, inoltre, lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione φ con punto iniziale $x_0 = 2$ oppure $y_0 = 0$, e dire come è fatto il grafico di φ nell'intorno del punto considerato.

4) Si considerino il cerchio C di centro $(0, 2)$ e raggio 2, e una semiretta r , avente per vertice l'origine, contenuta nel primo quadrante del sistema cartesiano. Detto α l'angolo che r forma con il semiasse positivo delle x , trovare (in funzione di α) la posizione del baricentro della parte di C che si trova al di sotto di r .

5) Data la forma differenziale $\omega = -\frac{\alpha y}{9x^2 + y^2} dx + \frac{3x}{9x^2 + y^2} dy$, determinarne il dominio $E \subset \mathbb{R}^2$.

Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che ω sia esatta in E ? Indicare un sottoinsieme $E_1 \subset E \subset \mathbb{R}^2$ nel quale la forma è esatta.

Dimostrare quanto affermato. In corrispondenza al valore di α trovato, calcolare $I = \int_{\gamma} \omega$ dove γ indica una ellisse di centro l'origine scelta a piacere.

Punteggi: 1) 7 punti; 2) 7 punti; 3) 7 punti; 4) 8 punti; 5) 8 punti.

Servono 15 punti per l'ammissione alla prova di teoria.