ANALISI MATEMATICA II (Ing. Clinica)
ESERCITAZIONE A.A.2003/2004

PROVA SCRITTA Tempo 2 ore

1) Si determini il campo $B \subset \mathbb{C}$ di convergenza assoluta della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k \quad , \quad z \in \mathbb{C} \ .$$

Calcolata in B la somma $f(z)$ si osservi che essa definisce una funzione olomorfa non solo in B, ma anche in campi $A \supset B$. Si determini A in modo che sia " il più ampio possibile".

2) Data, in un riferimento cartesiano $Oxyz$, la superficie sferica $\mathcal{S}$ di centro nell'origine e raggio r, calcolare

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \ &\mapsto \overrightarrow{OP} \end{aligned} \tag{0.1}$$

ed $\vec{n} = -\dfrac{\overrightarrow{OP}}{r}$ indica il versore normale alla superficie $\mathcal{S}$ nel suo generico punto P. Calcolare l'integrale I in due modi diversi.

3) Detto in T il dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ limitato dall'ellisse (∂T) avente come assi di simmetria gli assi coordinati del piano xy e passante per i punti $(2, 0)$ e $(0, 1)$, si calcoli

$$I = \int_{+\partial T} \frac{x}{x^2 + 4y^2} \, dx + \frac{4y}{x^2 + 4y^2} \, dy \quad ,$$

ove $+\partial T$ indica il consueto verso di percorrenza antiorario. Calcolare l'integrale in due modi diversi e confrontare i risultati ottenuti.