

Esercizi

1) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2 + x| - |x| - 2}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin 2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)^2}{x^2(1 - \cos x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} + x,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} + x.$$

2) Dire se esistono i punti sull'ellisse di equazione $3x^2 + 4y^2 = 1$ tale che sia minima e massima la distanza dal punto $(1, 0)$.

3) Dire se esistono i punti sull'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ tale che sia minima e massima la distanza dal punto $(0, 0)$.

4) Dire se la funzione $e^{x^2} + \sin x$ ha minimo o massimo su $\mathbf{R}$.

5) Provare che l'equazione $3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$ ha almeno una radice in $(0, 1)$, una radice maggiore di 1 ed una minore di 1.

6) Dimostrare che ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.

7) Dimostrare che se p è un polinomio di grado pari allora esistono $a \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $p(x) = a$ non ha soluzioni.

8) Sia $f : \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ è omogenea di grado α , cioè $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $t > 0$ e per ogni x . Se $\alpha > 0$ allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Se $\alpha \leq 0$ allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste.

9) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y}.$$

10) Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione.

$f : R \longrightarrow R$ definita da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$.

$f : R^2 \longrightarrow R$ definita da $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.