CAPITOLO I

INTRODUZIONE

Il Calcolo delle Variazioni (C.d.V.) é un settore dell'Analisi Matematica di grande importanza per la modellizzazione di problemi geometrici,fisici e meccanici e per la loro risoluzione. Il primo problema di C.d.V. che si incontra é il problema posto e risolto da Newton nel 1694 nel secondo libro dei "Principia". Si tratta del profilo aerodinamico di un corpo che si muove nell'acqua. Nel primo '700 molti contributi furono dati da Eulero, Lagrange e dai due fratelli Bernoulli. In particolare, nel 1744, Eulero individuò una condizione necessaria per l'esistenza del minimo di un funzionale e si lavorò in tutto il '700 e in gran parte dell' '800 in una direzione parallela a quella del calcolo infinitesimale, cercando nuove condizioni necessarie e condizioni sufficienti per avere minimi dei funzionali del C.d.V. In questa direzione lavorarono Jacobi e Legendre. Solo nella prima metá del novecento Tonelli pose le basi per un nuovo metodo per affrontare i problemi di minimo del C.d.V. : si tratta dei "metodi diretti del C.d.V. " che saranno oggetto di questo corso.

§1 Concetti generali

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

In questo caso diciamo che x_0 è punto di minimo per f e $f(x_0)$ è il valore minimo di f.

Ci chiediamo quali siano le condizioni da imporre alla funzione f affinché esista un punto di minimo.

Osserviamo che la limitatezza non è sufficiente, come si può vedere considerando la funzione $\arctan x$ che assume valori nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ e quindi è limitata, ma non esiste alcun punto x_0 che verifichi la (1). Infatti essendo $\arctan x$ strettamente crescente in $\mathbb{R}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ risulta $f(x_0 - \epsilon) < f(x_0)$.

Il valore $-\frac{\pi}{2} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \arctan x$ non è assunto in alcun punto $x_0 \in \mathbb{R}$, però è l'*estremo inferiore* di f, cioè verifica le due proprietà seguenti:

$$(i) \qquad -\tfrac{\pi}{2} < \arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists \bar{x} \quad : \quad \arctan \bar{x} < -\tfrac{\pi}{2} + \delta\,.$$

Un altro esempio che prova che la limitatezza non è sufficiente per avere l'esistenza del minimo, anche nel caso di una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato è dato da:

$$(*) \qquad f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \in [-1, 0) \\ x^2 + 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Evidentemente $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$, ma in nessun punto del suo insieme di definizione la funzione assume il valore zero. Di fatto $0 = \inf_{x \in [-1,1]} f(x)$ come prova il fatto che

$$(i) \qquad 0 \leq f(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$(ii) \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists \bar{x} \in [-1, 1] \quad : \quad f(\bar{x}) < 0 + \delta$$

Quindi la limitatezza non è sufficiente a garantire l'esistenza del minimo sia nel caso di funzioni definite in $\mathbb{R}$ sia nel caso di funzioni definite in un intervallo limitato.

Osserviamo che affinché una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, abbia minimo deve essere:

$$(2) \qquad \inf_I f = f(x_0)$$

per almeno un punto $x_0 \in I$. Ne segue che la condizione che la funzione sia limitata inferiormente è *necessaria*, inoltre perché sia verificata la (2) è sufficiente che

- (i) esiste una *successione minimizzante*, cioè una successione $\{x_n\} \subset I$ tale che $\lim_n f(x_n) = \inf_I f$, che ammette un'estratta che converge ad un punto $x_0 \in I$;
- (ii) la funzione $f(x)$ è *semicontinua inferiormente* (s.c.i.) nel punto x_0, cioè

$$f(x_0) \leq \ell$$

per ogni limite ℓ di successioni $\{f(x_n)\}$ con $x_n \longrightarrow x_0$.

Infatti da (i) e (ii) segue che $f(x_0) \leq \inf_I f$ e quindi $f(x_0) = \inf_I f$.

La (i) è una proprietà di *compattezza sequenziale* per la successione minimizzante, mentre la (ii) è legata alla continuità della funzione f. Osserviamo che se una delle due proprietà viene meno non si può garantire l'esistenza del minimo. Se riesaminiamo gli esempi precedenti alla luce di queste definizioni, possiamo vedere che per la funzione $f(x) = \arctan x$ manca la "compattezza" delle successioni minimizzanti, mentre la funzione definita dalla $(*)$ non verifica la proprietà di s.c.i. nell'origine; infatti $f(0) = 1$ mentre esistono successioni minimizzanti $\{x_n\}$ che tendono a zero per le quali $1 = f(0) > \lim_n f(x_n) = 0$.

Nel caso di funzioni reali di variabili reali il teorema di Weierstrass assicura al tempo stesso l'esistenza dei massimi e dei minimi.

Un procedimento completamente diverso consiste, quando sia possibile, nella ricerca dei *punti stazionari* della funzione, cioè delle soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$ e nel confronto dei valori della funzione in tali punti con quelli che essa assume nei punti di non derivabilità, negli estremi dell'intervallo di definizione e con i limiti dei valori della funzione nei punti di discontinuità. Questo procedimento permette di calcolare i punti di minimo, mentre quello precedente, legato al teorema di Weierstrass, fornisce l'informazione che il minimo esiste. Evidentemente i due approcci sono diversi da un punto di vista metodologico. La svolta decisiva nella storia del pensiero matematico, che indusse questo differente approccio metodologico, si ebbe con la formulazione del teorema fondamentale dell'algebra dovuta a Gauss. A differenza dei suoi predecessori, i cui studi sulle equazioni algebriche di ordine superiore erano rivolti a stabilire formule risolutive che potessero fornire esplicitamente le radici, Gauss (alla fine del '700) si limitò a provare l'esistenza di tali radici. All'inizio dell'800 la distinzione fra i due metodi era già affermata e fu proprio nell'ambito del Calcolo delle Variazioni (C.d.V.) che se ne trassero i risultati più' brillanti spesso suggeriti da esperienze fisiche concrete.

In questo corso la parte classica del C.d.V. viene ridotta alla parte essenziale mentre viene sviluppata soprattutto la parte dei cosiddetti "Metodi diretti".

Il C.d.V. nasce dall'esigenza di generalizzare la teoria elementare dei massimi e dei minimi (o, piú in generale, dei punti stazionari) delle funzioni di una o piú variabili reali, ricercando punti stazionari o estremali di *funzionali* cioè di funzioni aventi come dominio uno spazio di funzioni "ammissibili" anzichè una regione dello spazio euclideo. È facile immaginare esempi di varia origine e natura che rientrano in questo tipo di problematica.

§2 Esempi

Esempio 2.1 Definiamo *rettificabile* una curva del piano se esiste ed è finito il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte, quando la massima lunghezza delle corde della poligonale tende a zero. Un esempio di funzionale si ottiene associando ad ogni curva rettificabile del piano la sua lunghezza. Un problema di C.d.V. relativo a questo funzionale può essere posto nel modo seguente:

tra tutte le curve del piano che uniscono due punti A e B trovare quella di lunghezza minima, cioè trovare la curva $y = y(x)$ per la quale il funzionale:

$$J(y) = \int_a^b (1 + {y'}^2)^{1/2} dx$$

raggiunge il valore minimo.

La curva che risponde alla richiesta, come vedremo, è il segmento di retta che congiunge A e B.

Esempio 2.2 Uno dei problemi classici del C.d.V. é il problema isoperimetrico che fu risolto da Eulero: tra tutte le curve chiuse di assegnata lunghezza l, trovare quella che racchiude la massima area.

Esempio 2.3 Sia P, di coordinate (x_0, z_0), un punto fissato in un piano verticale. Il tempo che impiega una particella, che parte da P e raggiunge la retta verticale $x = b$, $b > x_0$, scivolando lungo la guida rappresentata da una curva $z = z(x)$ e sollecitata dalla sola forza di gravità, dipende dalla scelta della curva ed è quindi un funzionale. Si cerca la curva lungo la quale la particella impiega il minor tempo possibile. La curva richiesta é chiamata *brachistocrona.* Questo problema fu posto da John Bernoulli nel 1696 e giocò un ruolo importante negli sviluppi del C.d.V.

Per semplicità assumiamo che il punto (x_0, z_0) coincida con l'origine delle coordinate. Poiché la velocità del moto lungo una curva $z = z(x)$ è data da

$$v = \frac{ds}{dt} = (1 + z'^2)^{1/2} \frac{dx}{dt} \,,$$

ricavando dt e ricordando che $v = (2gz)^{1/2}$, dove si è denotata con g l'accelerazione di gravità, abbiamo il funzionale

$$J(z) = \int \frac{(1 + z'^2)^{1/2}}{(2gz)^{1/2}} dx \,.$$

Rinviamo la soluzione dei problemi posti e formuliamo, in generale, per funzionali unidimensionali un problema di C.d.V.

Minimizzare un funzionale del tipo:

$$J(y) \, = \int f(x, y, y') dx$$

in una classe A di funzioni *ammissibili.* La classe A sarà precisata di volta in volta a seconda del problema che vogliamo risolvere.

Più in generale si possono considerare anche funzionali rappresentati da integrali multipli e formulare problemi variazionali relativi.

Sia $u: \quad \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione "regolare" e $S = \{(x, u(x)), x \in \bar{\Omega}\}$ rappresenti una porzione di superficie cartesiana.

Esempio 2.4 Un funzionale definito su S è il funzionale del'area:

$$Area(S) = \int_\Omega (1 + |Du|^2)^{1/2} dx \,.$$

Un problema di C.d.V., collegato a tale funzionale, è quello di individuare la superficie di area minima tra tutte le $u(x)$ che assumono un valore assegnato al bordo di $\bar{\Omega}$.

Esempio 2.5 Pensiamo ad una membrana elastica come ad una superficie cartesiana e supponiamo che essa sia incastrata sul bordo $\partial\Omega$ di $\bar{\Omega}$, quindi $u|_{\partial\Omega} = \phi$, dove si è denotato con ϕ una funzione assegnata. L'energia potenziale è proporzionale al cambiamento di area: il fattore di proporzionalità è noto come tensione e si denota con $\tau(x, u)$ in quanto può dipendere sia da x che dallo spostamento $u(x)$. Il problema della ricerca della posizione di equilibrio si traduce nel problema di minimizzare l'integrale

$$\int_\Omega \tau(x, u)(1 + |Du|^2)^{1/2} dx \,,$$

nella classe degli spostamenti u ammissibili, cioè quelli che valgono ϕ su $\partial\Omega$.

CAPITOLO II

PRIMI ELEMENTI DEL C.D.V.

§1 Funzionali unidimensionali

In questa prima fase consideriamo funzionali del tipo

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \tag{1.1}$$

dove $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $[a, b]$. Per le ipotesi che faremo in questo capitolo il funzionale sarà sempre ben definito, di fatto (1.1) ha senso in ipotesi molto meno restrittive, ma di questo ci occuperemo più avanti.

Definizione 1.1 *Diremo che il funzionale $J(y)$, definito su $\mathcal{C}^1([a, b])$ è continuo in un punto $\bar{y} \in \mathcal{C}^1([a, b])$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|J(y) - J(\bar{y})| < \epsilon$ provvisto che $\|y - \bar{y}\| < \delta$.*

La disuguaglianza $|J(y) - J(\bar{y})| < \epsilon$ equivale alle due disuguaglianze $J(y) - J(\bar{y}) < \epsilon$ e $J(y) - J(\bar{y}) > -\epsilon$. Quando è verificata solo la prima si dice che il funzionale è superiormente semicontinuo, quando è verificata solo la seconda si dice che il funzionale è inferiormente semicontinuo.

Vedremo nel seguito che un funzionale del C.d.V. della forma (1.1) quando si assuma $f(x, y, y')$ continua e dotata di derivate prime e seconde continue in tutti i suoi argomenti, è continuo rispetto alla norma $\| \cdot \|_1$. In generale, non è continuo rispetto alla norma $\| \cdot \|_0$, anche se è continuo rispetto alla norma $\| \cdot \|_1$. Nel seguito denoteremo con $f_x(x, y, y')$, $f_y(x, y, y')$, $f_{y'}(x, y, y')$ le derivate parziali prime di $f(x, y, y')$ e con $f_{yy}(x, y, y')$, $f_{yy'}(x, y, y')$ $f_{y'y'}(x, y, y')$ le derivate parziali seconde rispetto a y e y'.

§2 Variazione di un funzionale

In questo paragrafo introduciamo il concetto di variazione di un funzionale che è l'analogo del concetto di differenziale per una funzione di n variabili reali.

Definizione 2.1 *Dato uno spazio lineare X, sia $\phi[h]$ un funzionale definito per $h \in X$. Si dice che ϕ è un funzionale lineare se*

$$\phi[\alpha h_1 + \beta h_2] = \alpha\phi[h_1] + \beta\phi[h_2] \qquad \forall\alpha,\, \beta \in \mathbb{R},\ \forall h_1,\, h_2 \in X\,.$$

Esempio 2.1 Il funzionale definito in $\mathcal{C}([a,b])$ dalla posizione $\phi[h] = h(x_0)$ con x_0 fissato in $[a,b]$.

Esempio 2.2 Il funzionale definito in $\mathcal{C}([a,b])$ da $\phi[h] = \int_a^b \alpha(x)h(x)\,dx$ con $\alpha(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ fissata.

Esempio 2.3 Siano $\alpha(x)$, $\beta(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ due funzioni fissate. Il funzionale definito da $\phi[h] = \int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx$ è lineare su $\mathcal{C}^1([a,b])$.

Saranno utili i seguenti lemmi.

Lemma 2.1 *Se $\alpha(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ e $\int_a^b \alpha(x)h(x)\,dx = 0$ per ogni $h(x) \in \mathcal{C}_0(a,b)$, allora $\alpha(x) \equiv 0$.*

Dim. Se in un punto $x_0 \in [a,b]$ fosse $\alpha(x_0) \neq 0$, diciamo $\alpha(x_0) > 0$, allora per continuità sarebbe $\alpha(x) > \epsilon > 0$ in un intervallo $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Sia $h(x) \in \mathcal{C}_0(a,b)$ definita da

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_1)(x_2 - x) & \text{se} \quad x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)h(x)\,dx \ge \epsilon \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x_2 - x)dx > 0$$

contro l'ipotesi.

Lemma 2.2 *Se $\alpha(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ e se*

$$\int_a^b \alpha(x)h'(x)dx = 0$$

per ogni funzione $h(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tale che $h(a) = h(b) = 0$ allora $\alpha(x)$ è costante in $[a,b]$.

Dim. Sia c la costante definita da

$$\int_a^b [\alpha(x) - c]\,dx = 0$$

e sia

$$h(x) = \int_a^x [\alpha(t) - c]\,dt.$$

Osserviamo che $h(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $h(a) = h(b) = 0$. Inoltre, da una parte si ha

$$\int_a^b [\alpha(x) - c]h'(x)dx = \int_a^b [\alpha(x) - c]^2 dx$$

e dall'altra

$$\int_a^b [\alpha(x) - c]h'(x)dx = \int_a^b \alpha(x)h'(x) - c[h(b) - h(a)]dx = 0\,.$$

Queste ultime due relazioni comportano che $\alpha(x) - c = 0$ e quindi la tesi.

Lemma 2.3 *Se $\alpha(x)$, $\beta(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ e se*

$$\int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx = 0 \tag{2.1}$$

per ogni funzione $h(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tale che $h(a) = h(b) = 0$ allora $\beta(x)$ è derivabile e risulta $\beta' = \alpha$.

Dim. Ponendo

$$A(x) = \int_a^x \alpha(t)dt$$

e integrando per parti si ha

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = -\int_a^b A(x)h'(x)dx$$

Di conseguenza la (2.1) si puó riscrivere

$$\int_a^b [-A(x) + \beta(x)]h'(x)dx = 0.$$

Dal lemma 2.2 segue che $-A(x) + \beta(x)$ è costante e dalla definizione di $A(x)$ segue la tesi.

Sia $\Delta J[h] = J(y+h) - J(y)$ l'incremento del funzionale corrispondente ad un incremento $h(x)$ della " variabile indipendente" y. Per y fissato, $\Delta J[h]$ è un funzionale di h, in generale, non lineare.

Esempio 2.4 Se consideriamo il funzionale $J(y) = \int_a^b y'^2\, dx$ l'incremento è dato da:

$$\Delta J[h] = \int_a^b [(y' + h')^2 - y'^2]\, dx = \int_a^b (2y' + h')h'\, dx\,.$$

Definizione 2.2 *Supponiamo che* $\Delta J[h] = \delta J[h] + \epsilon\|h\|$ *dove* $\delta J[h]$ *è un funzionale lineare in* h *ed* $\epsilon = \epsilon(h)$ *è infinitesima per* $\|h\| \longrightarrow 0$. *Allora si dice che il funzionale è differenziabile e* $\delta J[h]$ *si chiama differenziale di* J.

Osserviamo che il differenziale differisce dall'incremento $\Delta J[h]$ per una quantità che è infinitesima di ordine superiore ad uno rispetto alla $\|h\|$.

Teorema 2.4 *Il differenziale di* J, *se esiste, è unico*

Dim. Supponiamo che

$$\Delta J[h] = \phi_1[h] + \epsilon_1\|h\|$$

e che

$$\Delta J[h] = \phi_2[h] + \epsilon_2\|h\|$$

allora il funzionale lineare $\phi_1[h] - \phi_2[h]$ è infinitesimo di ordine maggiore di uno rispetto alla $\|h\|$, quindi deve essere identicamente nullo.

Il concetto di variazione di un funzionale è utile a stabilire una condizione necessaria affinché il funzionale abbia un estremo.

Definizione 2.3 *Diremo che il funzionale* $J[y]$ *ha un estremo relativo in un punto* $y = \bar{y}$, *se* $\Delta J[y] = J[y] - J[\bar{y}]$ *non cambia segno in un intorno della curva* $\bar{y}$.

Poiché i nostri funzionali sono definiti su insiemi di funzioni dotate di derivata continua che possono essere riguardate come elementi di $\mathcal{C}([a,b])$ oppure di $\mathcal{C}^1([a,b])$, in relazione a queste due possibilità, introduciamo la distinzione fra estremo debole ed estremo forte.

Definizione 2.4 *Diremo che J[y] ha un estremo debole per* $y = \bar{y}$, *se esiste un* $\epsilon > 0$ *tale che* $\Delta J[y]$ *ha lo stesso segno per tutte le* y *del dominio di definizione che verificano la condizione* $\|y - \bar{y}\|_1 \leq \epsilon$.

Definizione 2.5 *Diremo che J[y] ha un estremo forte per* $y = \bar{y}$, *se esiste un* $\epsilon > 0$ *tale che* $\Delta J[y]$ *ha lo stesso segno per tutte le* y *del dominio di definizione che verificano la condizione* $\|y - \bar{y}\|_0 \leq \epsilon$.

Osserviamo che ogni estremo forte è anche un estremo debole mentre non vale il viceversa. La ricerca di estremi deboli è più semplice che quella di estremi forti perché i funzionali del C.d.V. che consideriamo in questa prima fase sono continui nella norma dello spazio $\mathcal{C}^1([a,b])$ e non nella norma dello spazio $\mathcal{C}([a,b])$, come provano il seguente teorema e l'esempio successivo.

Teorema 2.5 *Se la funzione integranda* $f(x, y, y')$ *è dotata di derivate prime e seconde continue in tutti i suoi argomenti, il funzionale (1.1) è continuo nella norma* $\mathcal{C}^1([a,b])$.

Dim. Utilizzando la formula di Taylor per le funzioni di piú variabili, con punto iniziale y, l'incremento del funzionale si scrive

$$\Delta J[h] = \int_a^b [f_y(x,y,y')h + f_{y'}(x,y,y')h']\,dx + ... \tag{2.2}$$

dove i puntini stanno ad indicare termini di ordine superiore rispetto ad h ed h'. È facile ora vedere che quando $\|h\|_1 \longrightarrow 0$ l'incremento del funzionale tende a zero e quindi la tesi è provata.

Il seguente esempio mostra che il funzionale (1.1), in generale, non è continuo nella norma $\mathcal{C}([a,b])$.

Esempio 2.5 Consideriamo in (1.1) $a = 0$ e $b = \pi$. Supponiamo che l'integranda f sia non lineare in y' e che la derivata seconda $f_{y'y'}$ di f rispetto ad y' verifichi la condizione $f_{y'y'}(x,y,y') \geq C > 0$. Si può verificare che il funzionale è discontinuo in $y = 0$. Infatti sia $y_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ allora $y_n(x) \longrightarrow 0$ uniformemente in $(0,\pi)$ e risulta

$$\begin{aligned} J(y_n) - J(0) &= \textstyle\int_0^\pi [f(x,y_n,y_n') - f(x,0,0)]\,dx \\ &= \textstyle\int_0^\pi f_y(x,0,0)y_n\,dx \;+\; \int_0^\pi f_{y'}(x,0,0)\cos(nx)\,dx \\ &\quad + \textstyle\int_0^\pi f_{y'y}(x,\bar{y}_n,\bar{y}_n')y_n y_n'\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_0^\pi f_{yy}(x,\bar{y}_n,\bar{y}_n')y_n^2\,dx \\ &\quad + \textstyle\frac{1}{2}\int_0^\pi f_{y'y'}(x,\bar{y}_n,\bar{y}_n'){y_n'}^2\,dx \end{aligned}$$

con $\bar{y}_n$ opportuna, essendo la somma degli ultimi tre integrali il resto secondo Lagrange della formula di Taylor.

Poiché le derivate $f_{y'}, f_y, f_{y,y}, f_{y'y}$ sono limitate per le ipotesi fatte inizialmente su f, poiché la successione $\{y_n\}$ converge uniformemente a zero e $|y_n'| \leq 1$, il primo, il terzo e il quarto integrale tendono a zero; d'altra parte anche il secondo integrale tende a zero essendo il coefficiente di Fourier di $f_{y'}(x,0,0)$. Quindi si ha

$$\liminf_n [J(y_n) - J(0)] \;\geq\; \frac{C}{2}\int_0^\pi (\cos(nx))^2\,dx = \frac{C\pi}{4}.$$

Teorema 2.6 *Condizione necessaria affinché un funzionale differenziabile $J[y]$ abbia un estremo per $y = \bar{y}$ è che la sua variazione per $y = \bar{y}$ sia nulla, cioè*

$$\delta J[h] \;=\; 0$$

per $y = \bar{y}$ e per tutte le funzioni $h(x)$ ammissibili.

DIM. Per l'ipotesi di differenziabilità abbiamo

$$\Delta J[h] = \delta J[h] + \epsilon \|h\|,$$

dove $\delta J[h]$ è un funzionale lineare in h ed $\epsilon = \epsilon(h)$ è infinitesima per $\|h\| \to 0$. Per $\|h\|$ abbastanza piccola, l'ipotesi che $J[y]$ abbia un estremo per $y = \bar{y}$ comporta che $\Delta J[h]$ e $\delta J[h]$ devono avere lo stesso segno. Se, per assurdo, fosse $\delta J[h_0] \neq 0$ per qualche funzione ammissibile h_0, per $\alpha > 0$, si avrebbe $\delta J[-\alpha h_0] = -\delta J[\alpha h_0]$ e, di conseguenza, $\Delta J[h]$ cambierebbe segno in un intorno di $y = \bar{y}$. La contraddizione prova il teorema.

§3 EQUAZIONE DI EULERO DI UN FUNZIONALE

Formuliamo ora il più semplice problema variazionale.

Sia $f(x, y, y')$ una funzione dotata di derivate parziali prime e seconde continue rispetto a tutti i suoi argomenti. Allora tra le funzioni della classe

$$\mathcal{A} = \{y(x) \in \mathcal{C}^1([a, b]) : y(a) = A, y(b) = B\}$$

trovare quella per cui il funzionale

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \tag{3.1}$$

ha un estremo debole.

Cominciamo con l'osservare che, per confrontare funzioni y e $\bar{y}$ che appartengono alla stessa classe di funzioni ammissibili $\mathcal{A}$, l'incremento $h(x)$ deve verificare le condizioni $h(a) = h(b) = 0$. Consideriamo ora l'incremento del funzionale in y corrispondente all'incremento h, cioè:

$$\Delta J[h] = J(y + h) - J(y) = \int_a^b [f(x, y + h, y' + h') - f(x, y, y')]\, dx.$$

Dalla (2.2)

$$\Delta J[h] = \int_a^b [f_y(x, y, y')h + f_{y'}(x, y, y')h']\, dx + ...$$

dove i puntini stanno ad indicare termini di ordine superiore rispetto ad h ed h'. L'integrale a destra rappresenta la parte lineare dell'incremento ΔJ e il resto è infinitesimo rispetto a $\|h\|_1 \to 0$, quindi il funzionale è differenziabile e risulta:

$$\delta J[h] = \int_a^b [f_y(x, y, y')h + f_{y'}(x, y, y')h']\, dx.$$

Per il teorema 2.6 in un estremo deve essere $\delta J = 0$ e, per il lemma 2.3, si ha

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \tag{3.3}$$

Quest'ultima equazione è nota come equazione di Eulero del funzionale. Le curve integrali si chiamano estremali o estremanti. Dal momento che l'equazione di Eulero è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine le sue soluzioni dipendono, in generale, da due costanti arbitrarie che si determinano mediante le condizioni iniziali $y(a) = A$ e $y(b) = B$ (problema di Cauchy). Osserviamo che la soluzione del problema variazionale, pur dovendo soddisfare un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine non è, in generale, una curva dotata di derivate seconde continue, come prova il seguente esempio.

Esempio 3.1 Consideriamo il funzionale:

$$J(y) = \int_{-1}^{1} y^2(2x - y')^2 dx$$

nella classe

$$\mathcal{A} = \{y(x) \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : y(-1) = 0, y(1) = 1\}.$$

Il minimo del funzionale è uguale a zero e si ottiene in corrispondenza della funzione

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{for} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{for} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

che non ha derivata seconda nello zero. Si verifica facilmente che la funzione $y(x)$ appena introdotta è nella classe delle funzioni ammissibili. Inoltre l'equazione di Eulero per questo funzionale,

$$2y(2x - y')^2 - \frac{d}{dx}(-2y^2(2x - y')) = 0,$$

risulta identicamente soddisfatta dalla funzione $y(x)$.

Osservazione Nei punti di (a, b) in cui l'estremante y è dotata di derivata seconda l'equazione (3.3), utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, si può riscrivere nella forma:

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0\,.$$

Viceversa, data la precedente equazione, se in un punto risulta $f_{y'y'} \neq 0$, allora la y ammette derivata seconda continua in un intorno di tale punto in virtù dei teoremi di esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie.

In relazione al funzionale dell'esempio 3.1, in base all'osservazione appena fatta, poichè risulta $f_{y'y'} = 2y^2$, l'estremale ha derivata seconda continua in tutti i punti in cui $y \neq 0$ e nulla si può dire a priori sugli altri punti dell'intervallo.

Poiché l'equazione di Eulero di un funzionale gioca un ruolo importante nel C.d.V., esaminiamo qualche caso particolare.

Caso 1. La funzione integranda non dipende esplicitamente da y quindi il funzionale è del tipo

$$J(y) = \int_a^b f(x, y')dx.$$

In questo caso l'equazione di Eulero diventa

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

e con una integrazione otteniamo $f_{y'} = cost.$ Questa è un'equazione differenziale del primo ordine che non contiene y e si risolve facilmente con una integrazione. L'esempio 1.1 dell'introduzione rientra in questo caso. Il funzionale

$$J(y) = \int_a^b (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

ha come equazione di Eulero

$$\frac{d}{dx}[1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}}\, y' = 0$$

da cui si deduce facilmente $y' = C$ e, con una successiva integrazione, $y(x) = Cx + K$. Imponendo che la curva passi per (a,A) e (b,B) si determinano le due costanti C e K.

Caso 2. La funzione integranda non dipende esplicitamente da x quindi il funzionale è del tipo

$$J(y) = \int_a^b f(y, y')dx.$$

In questo caso l'equazione di Eulero è

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0.$$

Moltiplicando per y' otteniamo

$$\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) = 0$$

da cui $f - y' f_{y'}$ è costante. Rientra in questa situazione il funzionale dell'esempio 1.3 dell'introduzione. Con facili calcoli si vede che l'equazione di Eulero si riduce a

$$z(1 + {z'}^2) \; = \; costante$$

e che il suo integrale generale consiste in una famiglia di cicloidi di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = C(t - \sin t) + K \\ z(t) = C(1 - \cos t) \end{cases}$$

dove le costanti C e K si determinano con le condizioni assegnate. Si perviene cosí ad un arco di cicloide che si può considerare la soluzione per la particolare natura fisica del problema.

Caso 3. La funzione integranda non dipende esplicitamente da y' quindi il funzionale è del tipo

$$J(y) \; = \; \int_a^b f(x, y) dx.$$

In questo caso l'equazione di Eulero prende la forma $f_y(x, y) = 0$ e quindi non è un'equazione differenziale.

Per esercizio, risolviamo il problema:

$$\int_0^1 {y'}^2 dx \; = \; minimo$$

nella classe

$$\mathcal{A} = \; \{y(x) \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : y(0) = 0, y(1) = A\}.$$

L'equazione di Eulero si riduce a $\frac{d}{dx} y' \; = \; 0$ da cui si ricava $y(x) \; = \; Cx + K$. Imponendo le condizioni iniziali si perviene a $y(x) \; = \; Ax$ che è effettivamente il minimo come segue dalla disuguaglianza

$$\left(\int_0^1 y' dx \right)^2 \leq \int_0^1 {y'}^2 dx, \tag{3.4}$$

osservando che il primo membro è proprio uguale ad A^2.

La (3.4) è un caso particolare della disuguaglianza di Jensen citata al paragrafo 3 dell'appendice. Poichè essa è di interesse indipendentemente dalla applicazione che ne abbiamo appena fatto, ne diamo una dimostrazione.

Consideriamo $n+1$ punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n = 1$, nell'intervallo $[0, 1]$. La somma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \; = \; 1$ e, se Φ è una funzione convessa e g una qualunque funzione definita sull'intervallo $[0, 1]$ si ha :

$$\Phi\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})g(x_i)\} \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\Phi(g(x_i))\,.$$

Se si prende $\Phi(t) = t^2$, $g(x) = y'(x)$ e si fa tendere n all'infinito, ricordando la definizione di integrale, si ottiene la (3.4).

Concludiamo il paragrafo enunciando, senza dimostrarlo, il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per problemi variazionali con vincolo espresso in forma integrale. Tali vincoli sono della forma:

$$\mathcal{G}(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx = \textit{costante} \tag{3.5}$$

dove la funzione $g(x, y, y')$ è dotata di derivate seconde continue in un intorno di y nella metrica $\mathcal{C}^1([a,b])$.

Si ricercano funzioni $y : [a,b] \longrightarrow \mathcal{R}$ che minimizzano un funzionale integrale del tipo (1.1) tra tutte le funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfano delle prescritte condizioni agli estremi e il vincolo (3.5).

Vale il seguente teorema.

Teorema 3.1 *Sia $\bar{y}$ una minimante debole dell'integrale variazionale (1.1) nella classe $\mathcal{A}$ delle funzioni $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ che soddisfano le condizioni $y(a) = A$ e $y(b) = B$ e il vincolo $\mathcal{G}(y) = c$ per una assegnata costante c. Supponiamo pure che $\delta\mathcal{G}[h] \neq 0$ per tutte le funzioni $h \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b)$. Allora esiste un numero reale λ tale che*

$$\delta J[h] + \lambda\delta\mathcal{G}[h] = 0$$

per tutte le funzioni $h \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b)$. Inoltre, posto $\mathcal{H} = f + \lambda g$, risulta:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{H}_{y'} = \mathcal{H}_y.$$

§4 Metodi diretti

Le curve $y = y(x)$ che verificano l'equazione di Eulero di un funzionale si chiamano estremali e sono " candidate" ad essere minimi o massimi. Talvolta la natura stessa del problema aiuta a capire se si tratta di minimi o di massimi; per esempio, se un funzionale è convesso, allora un'estremale è un minimo, se è strettamente convesso il minimo è anche unico.

In generale, per essere più precisi sulla natura delle estremali, bisogna indagare la *variazione seconda* del funzionale che gioca il ruolo delle derivate seconde delle funzioni reali di variabile reale. Gli studi classici hanno proseguito nella direzione di fornire ulteriori condizioni necessarie e sufficienti. Comunque questo approccio non è sempre efficace ed è complicato dal fatto che, per risolvere un problema variazionale, non basta una soluzione della corrispondente equazione differenziale in un intorno di un punto (soluzione locale), ma piuttosto una soluzione in una data regione (soluzione globale) che soddisfa certe assegnate condizioni al bordo. Le difficoltà legate a quest'approccio, specialmente quando si ha a che fare con funzioni di più variabili reali e quindi con equazioni differenziali alle derivate parziali, hanno portato allo studio di metodi variazionali di tipo diverso che fanno uso dell'analisi funzionale; tali tecniche, che prendono il nome di "Metodi diretti del calcolo delle variazioni", si basano su una generalizzazione del teorema di Weierstrass e possono essere schematizzati come segue.

(1) Perchè il problema di minimo abbia senso occorre che esistano funzioni $y(x)$ nella classe $\mathcal{A}$ delle funzioni ammissibili per le quali $J(y) < +\infty$ e che

$$\mu = \inf_{\mathcal{A}} J(y) > -\infty.$$

Dalla definizione di *estremo inferiore* di un funzionale segue l'esistenza di almeno una successione $\{y_n\} \subset \mathcal{A}$ tale che $J(y_n) \to \mu$. Tale successione si chiama successione minimizzante.

(2) Bisogna provare che per una successione minimizzante $\{y_n\}$ esiste una estratta convergente ad un elemento $\bar{y} \in \mathcal{A}$.

(3) Bisogna provare che il funzionale è sequenzialmente semicontinuo inferiormente (s.s.c.i.) in $\bar{y}$, cioè

$$J(\bar{y}) \le \liminf_n J(y_n)$$

per ogni successione $\{y_n\}$ che converge a $\bar{y}$.

Osserviamo che la (2) è legata alla compattezza "sequenziale" della classe $\mathcal{A}$ delle funzioni ammissibili, quindi bisogna introdurre una nozione di convergenza che sarà legata ad una norma in modo che quando si dice che $\{y_n\}$ (per semplicità denotiamo con lo stesso simbolo una sua estratta) converge a $\bar{y} \in \mathcal{A}$, ciò vuol dire che $\|y_n - \bar{y}\| \to 0$. Una volta verificato il passo (2), se la (3) è verificata rispetto alla stessa norma cioè, se per $\|y_n - \bar{y}\| \to 0$ risulta $J(\bar{y}) \le \liminf_n J(y_n)$, allora si conclude che

$$\mu = \liminf_n J(y_n) \ge J(\bar{y}) \ge \mu$$

da cui, evidentemente, segue $J(\bar{y}) = \mu$ e $\bar{y}$ è la minimante richiesta.

Osserviamo pure che la proprietà di compattezza si verifica più facilmente se la convergenza è più debole e quindi ci sono più successioni che convergono, mentre la s.s.c.i. si verifica più facilmente se la convergenza è più forte, come si è visto nel teorema 2.5.

Ne segue che bisogna trovare una norma per cui la convergenza sia abbastanza debole per avere la (2) e, contemporaneamente, abbastanza forte per avere la (3).

In definitiva si è provato il seguente teorema

TEOREMA 4.1 *Se un funzionale J è semicontinuo inferiormente su un insieme compatto, ammette ivi minimo assoluto.*

§5 SEMICONTINUITÀ DI UN FUNZIONALE ED ESISTENZA DEL MINIMO

Ci proponiamo ora di studiare sotto quali condizioni il funzionale (1.1) è semicontinuo inferiormente (s.c.i.). Osserviamo che le due nozioni di semicontinuità inferiore (s.c.i.) e di sequenziale semicontinuità inferiore (s.s.c.i.), in generale, non coincidono. Nei casi che esamineremo in questo paragrafo le due nozioni coincidono.

Dapprima vediamo alcuni esempi di funzionali s.s.c.i.

ESEMPIO 5.1 Il funzionale $J(y) = \int_a^b |y'|\,dx$ definito sulle funzioni di classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme. Precisamente

$$\int_a^b |y'|\,dx \leq \liminf_n \int_a^b |y_n'|\,dx\,,$$

per ogni successione $\{y_n\}$ di funzioni tale che $\|y_n - y\|_0 \longrightarrow 0$.

Per provare quanto appena affermato, osserviamo che dalla definizione di integrale di Riemann, per ogni $\epsilon > 0$, possiamo trovare un indice n abbastanza grande, tale che

$$\int_a^b |y'|\,dx \leq \sum_{i=1}^n |y'(\bar{x}_i)|(x_{i+1} - x_i) + \epsilon = \sum_{i=1}^n |y(x_{i+1}) - y(x_i)| + \epsilon \tag{5.1}$$

Quest'ultima uguaglianza vale per il teorema di Lagrange. Inoltre, per il fatto che $\{y_n\}$ converge uniformemente a y, per n abbastanza grande, si ha

$$\sum_{i=1}^n |y(x_{i+1}) - y(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n |y_n(x_{i+1}) - y_n(x_i)| + \epsilon \tag{5.2}$$

Dalle (5.1) e (5.2), segue che

$$\begin{aligned}\int_a^b |y'|\,dx &\leq \sum_{i=1}^n |y_n(x_{i+1}) - y_n(x_i)| + 2\epsilon \\ &= \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} y_n'\,dx\right| + 2\epsilon \\ &\leq \textstyle\int_a^b |y_n'|\,dx + 2\epsilon\,.\end{aligned}$$

Passando al limite inferiore su n e facendo tendere ϵ a zero si conclude.

Riprendendo in esame l'esempio 2.5, l'ipotesi $f_{y'y'}(x, y, y') \geq C > 0$ gioca un ruolo fondamentale per provare che il funzionale è discontinuo nella norma $\mathcal{C}([a, b])$. Di fatto lo stesso argomento prova che il funzionale è s.c.i. e conviene osservare da subito il legame, che approfondiremo in seguito, tra la s.c.i. del funzionale e la convessità della funzione integranda $f(x, y, y')$ nel suo terzo argomento. Se risulta $f_{y'y'}(x, y, y') = 0$ il funzionale è lineare in y' e risulta continuo in $\mathcal{C}([a, b])$. Proviamo infatti il seguente teorema.

TEOREMA 5.1 *Siano $A(x, y)$ e $B(x, y)$ funzioni continue e dotate di derivate parziali prime continue. Allora il funzionale*

$$J(y) = \int_a^b (A(x, y) + B(x, y)y')\, dx,$$

è continuo in $\mathcal{C}^1([a, b])$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_0$.

DIM. Osserviamo subito che $\int_a^b A(x, y)\, dx$ è continuo per l'ipotesi di continuità di $A(x, y)$. Infatti, qualunque sia la curva $y = \bar{y}$ e per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutte le curve che verificano $\|y - \bar{y}\|_0 < \delta$ risulta $|A(x, y) - A(x, \bar{y})| < \epsilon$.

Di conseguenza

$$\left| \int_a^b [A(x, y) - A(x, \bar{y})]\, dx \right| \leq \int_a^b |A(x, y) - A(x, \bar{y})|\, dx \leq \epsilon(b - a)$$

Resta da provare la continuità dell'integrale $\int_a^b B(x, y)y'\, dx$.

Consideriamo la funzione definita da

$$\bar{B}(x, y) = \int_0^y B(x, \eta)\, d\eta.$$

Essa è evidentemente continua in x e y e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, risulta che $\bar{B}_y(x, y) = B(x, y)$. Inoltre poiché $\frac{d}{dx}\bar{B}(x, y) = \bar{B}_x(x, y) + \bar{B}_y(x, y)y'$ si ha pure

$$\int_a^b B(x, y)y'\, dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\bar{B}(x, y)\, dx - \int_a^b \bar{B}_x(x, y)\, dx.$$

La conclusione si ottiene osservando che il secondo integrale a secondo membro, per la continuità di $\bar{B}_x(x, y)$ nei suoi argomenti, si comporta come $\int_a^b A(x, y)\, dx$, mentre il primo integrale a secondo membro altro non è che $\bar{B}(b, y(b)) - \bar{B}(a, y(a))$ in virtù del teorema fondamentale del calcolo integrale.

OSSERVAZIONE Il teorema precedente vale richiedendo semplicemente che le funzioni $y \in Lip(a, b)$ anziché $y \in \mathcal{C}^1([a, b])$, dove con $Lip(a, b)$ si denota la classe delle funzioni Lipschitziane in (a, b).

Ricordiamo che una funzione $y \in Lip(a,b)$ se è continua in [a,b] ed esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|y(x) - y(\bar{x})| \leq L\,|x - \bar{x}|$$

per ogni coppia di punti $x, \bar{x} \in (a,b)$. Infine ricordiamo che le funzioni Lipschitziane in (a,b) sono derivabili quasi ovunque in (a,b).

Utilizziamo ora il teorema 5.1 per risolvere il problema seguente:

$$J(y) = \int_a^b (A(x,y) + B(x,y)y')\,dx = minimo,$$

in Dom J= $\{y \in Lip(a,b) : y(a) = 1, |y'(x)| \leq \pi\}$.

Osserviamo che le funzioni del dominio del funzionale sono equiuniformemente continue ed equilimitate in $[a,b]$ infatti, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$|y(x) - y(\bar{x})| = |\int_{\bar{x}}^x y'(t)\,dt| \leq \pi|x - \bar{x}|$$

per ogni coppia di punti x e $\bar{x}$ in $[a,b]$ ed inoltre, essendo $y(x) - y(a) = \int_a^x y'(t)dt$, si ha

$$|y(x)| \leq 1 + \pi(b-a) = c$$

per ogni $x \in [a,b]$. La prima conseguenza della equilimitatezza delle funzioni del Dom J, ricordando che le funzioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ sono continue, è che il funzionale è limitato:

$$|J(y)| \leq \{max_{[a,b]\times[-c,c]}|A(x,y)| + \pi max_{[a,b]\times[-c,c]}|B(x,y)|\}(b-a).$$

Considerata ora una successione minimizzante $\{y_n\} \subset DomJ$, per il teorema di Ascoli-Arzelà, (si veda il teorema 1.1 in appendice) esiste una estratta convergente ad una funzione $\bar{y}$ continua. E' facile poi verificare che di fatto $\bar{y} \in DomJ$. Dal momento che, per il teorema 5.1, il funzionale è continuo in $\mathcal{C}^1([a,b])$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_0$, la funzione $\bar{y}$ realizza il minimo richiesto.

Vale la pena di osservare che l'argomento utilizzato, con le opportune modifiche, consente di provare anche l'esistenza del massimo di J.

Nel caso in cui trattiamo funzioni che non sono dotate di derivata in senso classico nell'intervallo $[a,b]$ si possono ottenere ancora risultati di semicontinuità, ma bisogna ricorrere agli spazi di Sobolev, per la cui definizione rimandiamo all'appendice A.

Dimostriamo ora che il funzionale $J(y) = \int_a^b |y'|^p\,dx$, definito sullo spazio di Sobolev $W^{1,p}(a,b), p > 1$ è s.s.c.i. rispetto alla convergenza uniforme, quindi per ogni successione $\{y_n\} \subset W^{1,p}(a,b)$ tale che $\|y_n - y\|_0 \longrightarrow 0$, si ha che $y \in W^{1,p}(a,b)$ ed inoltre

$$\int_a^b |y'|^p \, dx \le \liminf_n \int_a^b |y_n'|^p \, dx. \tag{5.3}$$

Ragionando per assurdo, se per una successione $\{y_n\} \subset W^{1,p}(a,b)$ convergente uniformemente a y non fosse verificata la (5.3), esisterebbe una successione estratta, che indichiamo ancora con $\{y_n\}$, tale che

$$J(y_n) = \int_a^b |y_n'|^p \, dx \le \text{costante} < \int_a^b |y'|^p \, dx = J(y)\,, \tag{5.4}$$

e, utilizzando la proprietà triangolare delle norme,

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b |y_n|^p\right)^{1/p} dx &\le \left(\int_a^b |y_n - y|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y|^p \, dx\right)^{1/p} \\ &\le (b-a)^{1/p} \max\nolimits_{[a,b]} |y_n - y| + \left(\int_a^b |y|^p \, dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Dalle ultime due relazioni segue che $\|y_n\|_{1,p} \le C$. Ora, per il teorema 2.1 dell'appendice A, da ogni successione limitata in norma si può estrarre una successione debolmente convergente in $W^{1,p}(a,b)$ ad una funzione $\bar{y} \in W^{1,p}(a,b)$. Osserviamo che la convergenza uniforme implica la convergenza debole e quindi, per l'unicità del limite debole, $\bar{y} = y$. In definitiva si è visto finora che dalla successione $\{y_n\}$ è possibile estrarre una successione che converge debolmente in $W^{1,p}(a,b)$ alla funzione $y \in W^{1,p}(a,b)$. D'altra parte la convessità della funzione $f(t) = |t|^p, p > 1$ comporta

$$J(y_n) - J(y) \ge p \int_a^b |y'|^{p-1} \text{sgn}(y') \cdot (y_n' - y') \, dx$$

da cui, poiché la funzione $|y'|^{p-1}\text{sgn}(y')$ appartiene ad $L^{p'}(a,b)$,con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, per la convergenza debole delle y_n a y il secondo membro tende a zero. Ciò contraddice la (5.4).

Più in generale sussiste il seguente teorema di semicontinuità inferiore e di esistenza del minimo dovuto a Tonelli.

TEOREMA 5.2 *Sia $f(x,y,y')$ una funzione continua insieme alla sua derivata $f_{y'}(x,y,y')$ nell'insieme $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Inoltre supponiamo che valgano le seguenti condizioni:*

(i) $\qquad f(x,y,y') \ge C|y'|^p \quad p > 1, C > 0 \quad \forall x \in [a,b]$

(ii) $\qquad f(x,y,\bar{y}') - f(x,y,y') - (\bar{y}' - y') f_{y'}(x,y,y') \ge 0 \qquad \forall x \in [a,b], \quad \forall y, y', \bar{y}'.$

Allora il funzionale (1.1) è s.s.c.i. rispetto alla convergenza uniforme nell'insieme

$$\mathcal{D} = \{y \in W^{1,p}(a,b) : y(a) = A,\, y(b) = B,\, \|y'\|^p_{L^p} \leq D\}$$

e ammette minimo nell'insieme

$$Dom\, J = \{y \in W^{1,p}(a,b) : y(a) = A,\, y(b) = B.\}$$

Dim. Sia $\{y_n\} \subset \mathcal{D}$ una successione di funzioni convergente uniformemente ad $y \in \mathcal{D}$. Introduciamo l'insieme

$$E_\lambda = \{x \in [a,b] : |y'(x)| \leq \lambda\}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} J(y_n) \geq \textstyle\int_{E_\lambda} f(x,y_n,y_n')dx \;&=\; \textstyle\int_{E_\lambda} f(x,y,y')dx \\ &+ \textstyle\int_{E_\lambda}[f(x,y_n,y') - f(x,y,y')]dx + \int_{E_\lambda}[f(x,y_n,y_n') - f(x,y_n,y')]dx; \end{aligned}$$

quindi, poichè il secondo integrale tende a zero, per la continuità di f e per la convergenza uniforme delle y_n ad y, dalla (ii), passando al limite inferiore su n, segue:

$$\begin{aligned} \liminf_n J(y_n) &\geq \textstyle\int_{E_\lambda} f(x,y,y')dx \,+\, \liminf_n \int_{E_\lambda} (y_n' - y')f_{y'}(x,y_n,y')dx \\ &\geq \textstyle\int_{E_\lambda} f(x,y,y')dx \,+ \liminf_n \int_{E_\lambda} (y_n' - y')f_{y'}(x,y,y')dx \\ &\quad - \textstyle\limsup_n \int_{E_\lambda} |y_n' - y'| \cdot |f_{y'}(x,y_n,y') - f_{y'}(x,y,y')|dx \end{aligned}$$

nell'ultimo membro, il secondo termine tende a zero per la convergenza debole della successione y_n' a y' e per il fatto che $f_{y'}(x,y,y') \in L^{p'}(a,b)$ in quanto limitata su $[a,b]$; il terzo termine tende a zero come si vede utilizzando la disuguaglianza di Hölder e la stima $\int_{E_\lambda} |y_n' - y'|^p\, dx \,\leq\, 2D$. La conclusione si ottiene facendo tendere λ all'infinito nella disuguaglianza

$$\liminf_n J(y_n) \;\geq\; \int_{E_\lambda} f(x,y,y')dx.$$

Per provare la seconda parte del teorema, cioè l'esistenza del minimo, osserviamo che la (i) comporta che $\mu = inf J \geq 0$. Sia $\{y_n\}$ una successione minimizzante, quindi

$$\{y_n\} \subset W^{1,p}(a,b) : y_n(a) = A,\, y_n(b) = B,\, \mu \leq J(y_n) < \mu + 1/n.$$

Inoltre, utilizzando ancora la (i), risulta

$$C\int_a^b |y_n'(x)|^p\,dx \;<\; \mu + 1/n$$

da cui

$$\int_a^b |y_n'(x)|^p\,dx \;<\; (\mu+1)C^{-1} \;=\; D$$

e quindi la successione $\{y_n'\}$ è equilimitata in $L^p(a,b)$. La successione $\{y_n\}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale verifica

$$y_n(x) \;=\; y_n(a) \;+\; \int_a^x y_n'(t)\,dt$$

da cui segue la disuguaglianza

$$|y_n(x)| \;\le\; A \;+\; \int_a^x |y_n'(t)|\,dt$$

e, usando la disuguaglianza di Hölder,si ha

$$|y_n(x)| \;\le\; A \;+\; \left(\int_a^b |y_n'(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \cdot (b-a)^{1/p'}$$

che comporta la equilimitatezza delle successioni minimizzanti. Tali successioni sono pure equicontinue come prova la stima che segue.

$$|y_n(x) - y_n(\bar{x})| \;\le\; \int_{\bar{x}}^x |y_n'(t)|dt \le \|y_n'\|_{L^p}\cdot|x-\bar{x}|^{1/p'} \le D^{1/p}|x-\bar{x}|^{1/p'}.$$

Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una successione estratta da $\{y_n\}$ che converge uniformemente ad una funzione y che, come limite uniforme di funzioni continue su $[a,b]$, è una funzione continua su $[a,b]$. Inoltre,poichè per ogni n risulta $y_n(a) = A$ e $y_n(b) = B$, si vede facilmente che $y(a) = A$ e $y(b) = B$. Per concludere, una volta osservato che $y \in L^p$ per ogni $p > 1$, si deve provare che esiste la derivata debole y' di y, che $y' \in L^p$ e che $\|y'\|^p_{L^p} \le D$. A questo scopo, utilizzando la definizione di derivata debole per le y_n, consideriamo la relazione

$$\int_a^b y(x)\phi'(x)dx \;=\; \lim_n \int_a^b y_n(x)\phi'(x)dx \;=\; -\lim_n \int_a^b y_n'(x)\phi(x)dx$$

da cui, utilizzando la disuguaglianza di Hölder, ricaviamo la stima:

$$\left|\int_a^b y(x)\phi'(x)dx\right| \;\le\; \lim_n \left|\int_a^b y_n'(x)\phi(x)dx\right| \le D^{1/p}\|\phi\|_{L^{p'}}.$$

Da qui segue che l'applicazione

$$\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b) \to \int_a^b y(x)\phi'(x)dx$$

è un funzionale lineare e continuo rispetto alla norma $\|\phi\|_{L^{p'}}$. Per il teorema di Hahn-Banach (si veda il teorema 1.2 dell'appendice) questo funzionale si estende ad un funzionale lineare e continuo con la stessa norma su tutto lo spazio $L^{p'}$, quindi esiste una funzione $v(x) \in L^p(a,b)$ tale che $\|v\|_{L^p}^p \le D$ ed inoltre

$$\int_a^b v(x)\phi(x)dx = \int_a^b y(x)\phi'(x)dx \qquad \forall\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(a,b),$$

il che prova che y ammette derivata debole $v = -y'$ in L^p.

Riassumendo si è provato che una successione minimizzante ammette una estratta, i cui elementi appartengono a $\mathcal{D}$, che converge ad un elemento $y \in \mathcal{D}$. Per la semicontinuità inferiore provata nella prima parte del teorema, via teorema di Weierstrass, si conclude che y realizza il minimo del funzionale.

Nella prima parte del teorema di Tonelli si è visto come la convessità della funzione integranda $f(x,y,y')$ rispetto alla variabile "indipendente" y' sia sufficiente a garantire la semicontinuità inferiore del funzionale integrale rispetto alla convergenza uniforme delle funzioni y_n in un insieme in cui le derivate y_n' siano equilimitate nella norma dello spazio L^p.

Vedremo ora come la convessità dell'integranda sia anche condizione necessaria per la s.s.c.i. del funzionale. Ci occuperemo di un caso molto semplice di una funzione integranda $f(y')$ che non dipende esplicitamente da x e da y limitandoci ad affermare, senza dimostrarlo, che la suddetta proprietà vale più in generale anche per funzioni integrande che dipendono esplicitamente da x e da y.

TEOREMA 5.3 *Sia $J(y) = \int_a^b f(y')\,dx$ s.s.c.i. rispetto alla convergenza uniforme di funzioni dotate di derivate le cui norme in L^p sono equilimitate, allora per ogni $z \in \mathcal{R}$ e per ogni funzione test ϕ si ha*

$$(b-a)f(z) \le \int_a^b f(z+\phi'(x))\,dx \tag{5.5}$$

che implica la convessità di $f(z)$ rispetto a z.

DIM. Per semplicità, in luogo di (a,b), consideriamo un intervallo I centrato nell'origine e di lunghezza unitaria. Data una funzione test ϕ definita su I la estendiamo per periodicità su $\mathcal{R}$ e consideriamo, per ogni intero positivo n, le funzioni definite su $\mathcal{R}$ dalla posizione

$$\phi_n(x) = n^{-1}\phi(nx).$$

Poniamo ora $y(x) = z \cdot x$ e $y_n(x) = z \cdot x + \phi_n(x)$. Poichè $\phi_n(x) \longrightarrow 0$ uniformemente, la successione $\{y_n\}$ converge uniformemente ad y ed ha costanti di Lipschitz equilimitate. Quindi dall'ipotesi segue

$$\int_I f(z)\,dx \;=\; f(z) misI \;\leq\; \liminf_n \int_I f(z + \phi_n'(x))\,dx.$$

Osservando che $\phi_n'(x) = \phi'(nx)$, ponendo $t = nx$ e ricordando che ϕ è periodica, otteniamo

$$f(z) misI \;\leq\; \liminf_n \frac{1}{n} \int_{nI} f(z + \phi'(t))\,dt \;=\; \int_I f(z + \phi'(t)\,dt$$

che prova la (5.5).

La dimostrazione precedente vale pure per funzioni $\phi \in Lip(a,b)$ che siano nulle agli estremi dell'intervallo. Proveremo che la (5.5) comporta che $f = f(z)$ è una funzione convessa in z, cioè

$$f(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \;\leq\; \lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_2)$$

per ogni $\lambda \in (0,1)$ e per ogni $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$. Per semplificare i conti consideriamo $a = 0$ e $b = 1$.

Consideriamo la funzione lipschitziana $\tilde{\phi} : x \in (0,1) \longrightarrow \tilde{\phi}(x)$ tale che

$$\tilde{\phi}'(x) = \begin{cases} z_1 & \text{se} \quad x \in (0,\lambda) \\ z_2 & \text{se} \quad x \in (\lambda,1)\,. \end{cases}$$

Risulta che

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(0) + \int_0^x \tilde{\phi}'(t)\,dt$$

e quindi

$$\tilde{\phi}(1) = \tilde{\phi}(0) + \int_0^\lambda z_1\,dt + \int_\lambda^1 z_2\,dt = \tilde{\phi}(0) + z$$

dove si è posto $z = \lambda z_1 \;+\; (1-\lambda) z_2$.

Posto ora $\phi(x) \;=\; \tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(0) - z \cdot x$, risulta $\phi(0) = \phi(1) = 0$ ed inoltre, poichè $\tilde{\phi}'(x) = z + \phi'(x)$ per la (5.5) si ha:

$$f(z) \leq \int_0^1 f(z + \phi')\,dx \;=\; \int_0^\lambda f(z_1)\,dx \;+\; \int_\lambda^1 f(z_2)\,dx \;=\; \lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_2)$$

che esprime la proprietà di convessità di f.

§6 Osservazioni sul teorema di Tonelli

Anche se sono stati dimostrati teoremi di esistenza in ipotesi meno restrittive di quelle considerate da Tonelli nella prima metà del '900, occorre evidenziare che, in generale, non si può fare a meno di un' ipotesi del tipo (i) che va sotto il nome di "coercività" né di un' ipotesi del tipo (ii) cioè della convessità. A tale scopo consideriamo i due esempi che seguono.

Esempio 6.1 Sia $f(x,y,y') = x \cdot y'^2$. Tale funzione non verifica la condizione (i) del teorema di Tonelli. Proviamo che il problema:

$$\inf \left\{ J(y) = \int_0^1 x(y'(x))^2 \, dx : y(0) = 1, y(1) = 0 \quad y \in W^{1,2}(0,1) \right\}$$

non ammette minimo.

Dal momento che $J \geq 0$ si deve avere anche $\inf J \geq 0$. L'estremo inferiore del funzionale è zero, come si vede prendendo la successione

$$y_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0, 1/n] \\ -\dfrac{\log x}{\log n} & \text{se} \quad x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Infatti, per ogni n, $y_n \in W^{1,2}(0,1), y_n(0) = 1, y_n(1) = 0$ e $J(y_n) = \dfrac{1}{\log n} \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$. D'altra parte se esiste $y \in W^{1,2}(0,1)$ tale che $J(y) = 0$ deve essere $y' = 0$ e quindi y costante, per cui non possono essere verificate le condizioni agli estremi dell'intervallo contemporaneamente.

Esempio 6.2 Sia $f(x,y,y') = (y^2 + y'^2)^{1/2}$. Tale funzione non verifica la condizione (i) del teorema di Tonelli perché y' cresce linearmente mentre la richiesta in (i) è $p > 1$.

Osserviamo che lo spazio in cui ambientiamo il problema,$W^{1,1}(0,1)$ non è uno spazio riflessivo.

Proviamo che il problema:

$$\inf \left\{ J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2)^{1/2} \, dx : y(0) = 0, y(1) = 1 \quad y \in W^{1,1}(0,1) \right\} \tag{6.1}$$

non ammette minimo. In questo caso si ha

$$J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2)^{1/2} \, dx \geq \int_0^1 |y'| \, dx \geq \int_0^1 y' \, dx = 1$$

e quindi il problema (6.1) ha un estremo inferiore maggiore o al più uguale a 1. Proviamo che esiste una successione $\{y_n\}$ nella classe delle funzioni ammissibili tale che $J(y_n) \longrightarrow 1$. La funzioni della successione

$$y_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0, 1 - 1/n] \\ 1 + n(x-1) & \text{se} \quad x \in (1 - 1/n, 1]. \end{cases}$$

sono ammissibili perché $y_n \in W^{1,1}(0,1)$, $y_n(0) = 0$, $y_n(1) = 1$ e, per $n \longrightarrow \infty$, soddisfano

$$1 \leq J(y_n) \leq \frac{(1+n^2)^{1/2}}{n} \longrightarrow 1.$$

Allora l'estremo inferiore del problema (6.1) è proprio 1, ma, come nell'esempio precedente, non esiste $y \in W^{1,1}(0,1)$ tale che $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ e $J(y) = 1$.

Il seguente esempio, dovuto a Bolza, mette in rilievo come possa venir meno l'esistenza del minimo in assenza di convessità della funzione integranda $f(x, y, y')$ rispetto alla variabile y'. Quindi, in questo caso, non è soddisfatta la (ii) del teorema di Tonelli.

Esempio 6.3 Consideriamo il problema

$$\text{(6.2)} \quad \inf \left\{ J(y) = \int_0^1 [y^2 + ({y'}^2 - 1)^2]\, dx : y(0) = 0, y(1) = 0, \quad y \in W^{1,4}(0,1) \right\}$$

Risulta $J(y) \geq 0$. Inoltre, per n intero fissato e $0 \leq k \leq n-1$, le funzioni definite da

$$y_n(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{n} & \text{se} \quad x \in [2k/2n, (2k+1)/2n] \\ -x + \frac{k+1}{n} & \text{se} \quad x \in ((2k+1)/2n, (2k+2)/2n] \end{cases}$$

verificano: $0 \leq y_n(x) \leq 1/2n \quad \forall x \in (0,1)$, $y_n(0) = 0 = y_n(1)$ e infine $|y_n'(x)| = 1$ quasi ovunque in $(0,1)$. Ne segue che

$$0 \leq \inf J \leq J(y_n) \leq \frac{1}{4n^2}.$$

Facendo tendere n all'infinito si ottiene che l'estremo inferiore del problema (6.2) è proprio 0, ma nessuna funzione $y \in W^{1,4}(0,1)$ verifica $J(y) = 0$ perché dovrebbero essere contemporaneamente verificate quasi ovunque in $(0,1)$ le condizioni $y(x) = 0$ e $|y'(x)| = 1$ e ciò è assurdo.

Molto recentemente, spinti da motivazioni concrete, in particolare dal fatto che alcuni problemi fisici che si potevano modellizzare con funzionali "non convessi" del C.d.V. esibivano dei minimi, si è indagato in tal senso. Si è sviluppata la teoria matematica partendo dall'osservazione che le condizioni (i) e (ii) del teorema di Tonelli sono "sufficienti" ad avere l'esistenza del minimo di un funzionale, così come il teorema di Weierstrass individua le condizioni sufficienti perché una funzione reale di variabile reale ammetta minimo.

Il seguente esempio è dovuto a P.Marcellini.

Esempio 6.4 Consideriamo una funzione continua $f = f(z)$ definita su $\mathcal{R}$ tale che

$$\text{(6.3)} \qquad \lim_{z \longrightarrow \pm\infty} f(z)|z|^{-1} = +\infty$$

e dimostriamo che l'integrale

$$\int_a^b f(y'(x))\,dx \tag{6.4}$$

ha minimo nella classe delle funzioni lipschitziane su $[a,b]$ tali che $y(a) = A$ e $y(b) = B$.

Osserviamo che su f non è stata fatta alcuna ipotesi di convessità. Denotiamo con f^{**} la più grande funzione convessa minorante f e applichiamo la disuguaglianza di Jensen (si veda il paragrafo 3 dell'appendice); si ha:

$$\int_a^b f^{**}(y'(x))\,dx \geq (b-a)f^{**}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b y'(x)\,dx\right) = (b-a)f^{**}(z), \tag{6.5}$$

dove si è posto $z = (B-A)/(b-a)$. Dato che in (6.5) vale l'uguaglianza se $\bar{y}(x) = z(x-a)+A$, la funzione $\bar{y}$ realizza il minimo dell'integrale a primo membro di (6.5). Se $f(z) = f^{**}(z)$ evidentemente $\bar{y}$ realizza anche il minimo del funzionale (6.4). Se invece $f(z) > f^{**}(z)$, allora per la (6.3) esiste un intervallo (z_1, z_2) contenente z tale che $f(z_1) = f^{**}(z_1)$, $f(z_2) = f^{**}(z_2)$ e f^{**} è affine (cioè il suo grafico è un segmento di retta) su tale intervallo. Allora ponendo

$$\bar{\bar{y}}(x) = A + \int_a^x \alpha(t)\,dt,$$

dove

$$\alpha(t) = \begin{cases} z_1 & \text{se} \quad a \leq t \leq a + (b-a)(z-z_2)/(z_1-z_2) \\ z_2 & \text{se} \quad a + (b-a)(z-z_2)/(z_1-z_2) \leq t \leq b, \end{cases}$$

risulta $\bar{\bar{y}}(a) = A, \bar{\bar{y}}(b) = B$ e

$$\int_a^b f^{**}(\bar{y}'(x))\,dx = \int_a^b f^{**}(\bar{\bar{y}}'(x))\,dx = \int_a^b f(\bar{\bar{y}}'(x))\,dx.$$

Ne segue che $\bar{\bar{y}}$ realizza il minimo dell'integrale in (6.4).

CAPITOLO III

RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI CLASSICI

In questo capitolo presentiamo alcuni problemi variazionali che furono discussi prima o poco dopo la scoperta del calcolo infinitesimale.

Problema 1 Il principio di Fermat e le leggi dell'ottica geometrica.

Nel 1662 Fermat derivò la legge di rifrazione dell'ottica geometrica da un suo famoso principio in base al quale "la natura agisce sempre per le via più corte".

Nel contesto dell'ottica geometrica questo significa che la luce si muove da un punto all'altro nel più breve tempo possibile.

Per ottenere la legge di rifrazione dal principio di Fermat, consideriamo due mezzi separati da un piano e due punti A e B ciascuno appartenente ad uno dei due semispazi individuati dal piano e supponiamo che la luce si muove in un mezzo con una velocità inversamente proporzionale alla *densità ottica* del mezzo. Denotiamo la densità ottica dei due mezzi rispettivamente con η_1 e η_2, denotiamo pure con x, y il piano ortogonale a quello che separa i due mezzi e che passa per i punti A e B, e supponiamo che per ogni $z = (x, y) \in \mathcal{R}^2$

$$\eta(z) = \begin{cases} \eta_1 & \text{se} \quad y \geq 0 \\ \eta_2 & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

Per ogni curva piana $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R}^2$ il tempo $T(\phi)$ è dato da

$$T(\phi) \;=\; \int_0^1 \eta(\phi)|\phi'|\, dt.$$

Quindi il problema di minimo che ci interessa è

$$\min \left\{ \int_0^1 \eta(\phi)|\phi'|\, dt : \quad \phi(0) = A, \quad \phi(1) = B \right\}.$$

Questo problema si può ricondurre alla minimizzazione di una funzione di una variabile reale. Invero, in ognuno dei due mezzi omogenei, i raggi di luce sono linee rette perché le curve che minimizzano il tempo sono le curve che minimizzano la lunghezza. Pertanto una curva di minima lunghezza che congiunge il punto A nel primo mezzo con il punto B nel secondo mezzo, deve essere una spezzata formata da due segmenti di retta AP e PB dove $P = (x, 0)$ è un punto dell'asse x. Il tempo $T(x)$ necessario alla luce per propagarsi è dato da:

$$T(x) = \eta_1 |A - P| + \eta_2 |P - B|.$$

Il problema di minimo tempo si riduce ad un problema di minimo per la funzione $T(x)$ quando $x \in \mathcal{R}$. Se $A = (a, b)$ e $B = (\alpha, \beta)$ con $a < \alpha$ e $b < \beta$, il tempo è dato da

$$T(x) = \eta_1[(a - x)^2 + b^2]^{1/2} + \eta_2[(\alpha - x)^2 + \beta^2]^{1/2}.$$

L'annullarsi della derivata prima porta all'equazione

$$\eta_1 \frac{x - a}{[(a - x)^2 + b^2]^{1/2}} = \eta_2 \frac{\alpha - x}{[(\alpha - x)^2 + \beta^2]^{1/2}}$$

che rappresenta la legge di rifrazione che, indicando con θ_1 l'angolo che AP forma con l'asse x e con θ_2 l'angolo che l'asse x forma con PB, si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}.$$

Problema 2 Il cavo fissato agli estremi.

Questo problema fu proposto da Galileo nel 1638. Trovare la forma di un cavo sottile, pesante, inestensibile e sospeso ai suoi estremi. La soluzione fu trovata indipendentemente da Jacob e Johann Bernoulli, Huyghens e Leibnitz fra il 1690 e il 1692. Sia x, y un sistema di coordinate cartesiane in un piano verticale e siano $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, con $x_1 < x_2$, gli estremi del cavo. Supponiamo che il cavo sia geometricamente descritto dal grafico di una funzione $z = u(x)$ con $x_1 \le x \le x_2$. Allora l'energia potenziale del cavo è proporzionale alla quantità

$$J(u) = \int_{x_1}^{x_2} u(x)[1 + (u'(x))^2]^{1/2}\, dx$$

mentre l'ipotesi di inestensibilità si traduce nel vincolo

$$(*) \qquad \int_{x_1}^{x_2} [1 + (u'(x))^2]^{1/2}\, dx \;=\; L$$

che esprime il fatto che la lunghezza L del cavo è fissata. La forma del cavo in equilibrio è descritta da una minimante $u(x)$ dell'energia potenziale $J(u)$ che verifica la $(*)$ e le condizioni $u(x_1) = y_1$ e $u(x_2) = y_2$.

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si veda il teorema 3.1 del capitolo II) con $\mathcal{H} = (u + \lambda)\sqrt{1 + u'^2}$, si cercano le soluzioni dell'equazione di Eulero del funzionale

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(x) + \lambda)[1 + (u'(x))^2]^{1/2}\, dx,$$

quindi le soluzioni dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(u + \lambda)u'}{(1 + u'(x)^2)^{1/2}}\right] = [1 + u'(x)^2]^{1/2}.$$

Osserviamo che il secondo membro di questa equazione è maggiore di zero, quindi la funzione $\left[\frac{(u+\lambda)u'}{(1+u'^2)^{1/2}}\right]$ è strettamente crescente per $x_1 < x < x_2$, da cui si deduce che esiste al più un punto $\bar{x}$ nell'intervallo suddetto, in cui $u(\bar{x}) + \lambda = 0$. Poiché $\mathcal{H}_{y'y'} = (u + \lambda)(1 + u'^2)^{-3/2}$ è diverso da zero per $x \neq \bar{x}$, si ha che $u(x)$ è dotata di derivata seconda continua in $[x_1, x_2]$ tranne, al più, il punto $\bar{x}$. Risolvendo l'equazione, in tutti i punti $x \neq \bar{x}$, si perviene a

$$(u + \lambda)u'' = 1 + u'^2$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{u'u''}{1 + u'^2} = \frac{u'}{u + \lambda}.$$

Con una integrazione otteniamo

$$\log(1 + u'^2) \ = \ 2 \log |u + \lambda| \ + \ c$$

da cui, facendo tendere x ad $\bar{x}$, ricaviamo che $u + \lambda$ è di fatto diverso da zero in tutto l'intervallo. Ne segue $1 + u'^2 \ = \ c(u + \lambda)^2$, che si può integrare fornendo la soluzione

$$u(x) = \frac{e^{\alpha x + \beta} + e^{-\alpha x - \beta} + \gamma}{2\alpha},$$

dove le costanti α, β, γ si determinano utilizzando la $(*)$ e le condizioni $u(x_1) = y_1$ e $u(x_2) = y_2$.

Problema 3 Corde elastiche.

Consideriamo una corda elastica che, in posizione di riposo, è descritta dal segmento [-1,1] dell'asse x. Se carichiamo la corda e denotiamo con $u(x)$ il suo spostamento verticale, in accordo con il più semplice modello della teoria della elasticità lineare, l'energia elastica della corda è data da

$$J(u) = k\int_{-1}^{1} |u'(x)|^2\,dx$$

dove k è una costante positiva che dipende dal materiale di cui è fatta la corda. Supponendo che la corda è fissata agli estremi e che il carico g è uniformemente distribuito, la forma della corda si ottiene minimizzando l'energia totale del sistema

$$J(u) = \int_{-1}^{1} [k|u'|^2 + gu]\,dx$$

con le condizioni agli estremi $u(-1) = u(1) = 0$. L'equazione di Eulero, in questo caso, è data da $-2ku'' + g = 0$ che, risolta in modo che siano anche soddisfatte le condizioni agli estremi, fornisce la soluzione $u(x) = \frac{g(x^2-1)}{4k}$ che rappresenta un arco di parabola.

Se il carico è concentrato in un punto, ad esempio nell'origine, il problema di minimo diventa:

$$\min\left\{\int_{-1}^{1} k|u'|^2\,dx + gu(0)\;:\;u(-1) = u(1) = 0.\right\}$$

Calcoliamo esplicitamente la variazione di questo funzionale e imponiamo il suo annullarsi. Allora

$$0 = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\int_{-1}^{1} k|u' + \epsilon h'|^2\,dx + g(u(0) + \epsilon h(0)) - \int_{-1}^{1} k|u'|^2\,dx - gu(0)\right]$$

e quindi

$$\int_{-1}^{1} 2ku'h'\,dx + gh(0) = 0. \tag{*}$$

Prendendo funzioni test h con supporto nell'intervallo $(-1,0)$, da (*) risulta

$$\int_{-1}^{0} 2ku'h'\,dx = 0$$

e dal lemma 2.2 del capitolo II, segue che u' deve essere costante in $(-1,0)$. Ragionando in modo analogo si deduce pure che u' deve essere costante in $(0,1)$. Teniamo ora conto delle condizioni assegnate agli estremi e otteniamo

$$u(x) = \begin{cases} c_1(x+1) & \text{se} \quad x \in (-1,0) \\ c_2(-x+1) & \text{se} \quad x \in (0,1). \end{cases}$$

Poichè la funzione u deve essere continua in $(-1,1)$ e, in particolare nello zero, troviamo che $c_1 = c_2 = c$. Ritornando alla (*) e sostituendo la derivata u' della funzione u che abbiamo trovato, si ha

$$\int_{-1}^{0} 2kch'\,dx - \int_{0}^{1} 2kch'\,dx + gh(0) = 0$$

e quindi, poichè questa equazione deve valere per tutte le funzioni test h con supporto in (-1,1) e non solo per quelle che si annullano anche nello zero, deduciamo che $h(0)[4kc+g] = 0$ da cui $c = -g/4k$. La conclusione è che, in questo caso, la forma della corda elastica è data da $u(x) = \frac{g(|x|-1)}{4k}$ e quindi è data da due segmenti di retta che congiungono rispettivamente il punto $(-1,0)$ con $(0,-g/4k)$ e $(0,-g/4k)$ con $(1,0)$.

Problema 4 Il problema del profilo aerodinamico ottimale.

Nel 1685 Newton trattò il problema di determinare la forma di un corpo a simmetria radiale che presentasse la minima resistenza nel muoversi in un fluido e con ciò risolse il primo problema del C.d.V. che non si poteva ricondurre a un problema di minimo per una funzione di un numero finito di variabili reali. Nei suoi *Principia* egli scrisse:

Se in un mezzo rarefatto, consistente di particelle uguali liberamente disposte ad uguale distanza l'una dall'altra, una sfera e un cilindro di uguale diametro si muovono con la stessa velocità nella direzione dell'asse del cilindro, (allora) la resistenza della sfera sarà la metà di quella del cilindro.....Io immagino che questa proprietà non sarà senza applicazioni nella costruzione delle navi.

Per comprendere il modello di Newton, supponiamo che il fluido è così rarefatto che può essere pensato come consistente di particelle uniformemente distribuite e indipendenti l'una dall'altra. Allora l'unica interazione tra il corpo e le particelle è causata dagli urti, se si trascura l'attrito tangenziale.

Supponiamo che il corpo sia radialmente simmetrico e che si muova con velocità v, in direzione dell'asse di rotazione, che supponiamo sia l'asse delle ascisse; allora, in un riferimento tridimensionale xyz, il suo profilo sarà grafico di una funzione $\phi(x) = r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $a \le x \le b$. Nell'urto tra il corpo e una particella di massa m, esso viene rallentato perché la sua quantità di moto nella direzione dell'asse x diminuisce di una quantità proporzionale a

$$m\,v \cos^2\theta = m\,v\,\frac{\phi'^2(x)}{1+\phi'^2(x)}$$

dove si è denotato con θ l'angolo che la velocità forma con la normale alla superficie nel punto di incidenza della particella. Per calcolare la resistenza complessiva del corpo dobbiamo considerare di quanto incidano gli urti sull'elemento di superficie e integrare successivamente. Per questo dobbiamo tener conto solo della componente dell'elemento di superficie ortogonale alla direzione del moto, che è data da $d\sigma = 2\pi\phi(x)\phi'(x)dx$. Osserviamo che, se il moto avviene nel verso opposto a quello in cui è orientato l'asse delle ascisse, la resistenza sarà minore se $\phi'(x) > 0$. Per semplicità consideriamo il caso in cui $\phi'(x) > 0$ in tutto l'intervallo $[a, b]$, essendo sempre possibile ricondursi a tale situazione. Quindi, se $\phi(a) = 0$, la resistenza sarà proporzionale all'integrale

$$\int_a^b \frac{\phi(x)[\phi'(x)]^3\, dx}{1 + \phi'^2(x)},$$

mentre, se $\phi(a) > 0$, la resistenza avrà un contributo aggiuntivo proporzionale a $|\phi(a)|^2/2$.

Di conseguenza si pone il problema di minimizzare il funzionale

$$J(\phi) = \int_a^b \frac{\phi(x)[\phi'(x)]^3\, dx}{1 + \phi'^2(x)} + |\phi(a)|^2/2$$

tra tutte le curve $\phi(x)$, derivabili quasi ovunque su $[a, b]$, che soddisfino le condizioni iniziali $\phi(a) \geq 0$, $\phi(b) = R$ e tali che $\phi' > 0$ in (a, b).

Il fatto che una delle due condizioni agli estremi sia espressa in forma di disuguaglianza richiede attenzione nel ricavare l'equazione di Eulero del funzionale, dal momento che le funzioni test non possono essere prese nulle agli estremi, ma devono annullarsi in b e devono essere non negative in a. Calcoliamo esplicitamente la variazione di questo funzionale, indicando con $f(\phi, \phi') = \frac{\phi[\phi']^3}{(1+\phi'^2)}$ la funzione integranda:

$$\delta J[h] = \int_a^b [f_\phi(\phi, \phi')h + f_{\phi'}(\phi, \phi')h']\, dx + \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{|\phi(a) + \epsilon h(a)|^2 - |\phi(a)|^2}{2\epsilon}.$$

Imponendo che $\delta J[h] = 0$, si ha

$$\int_a^b [f_\phi(\phi, \phi') - \frac{d}{dx} f_{\phi'}(\phi, \phi')]h\, dx - h(a)f_{\phi'}(\phi(a), \phi'(a)) + h(a)\phi(a) = 0.$$

Ne segue, osservando che l'integranda non dipende esplicitamente da x e ricordando le considerazioni del paragrafo 3 del capitolo II, che deve essere

$$(*) \qquad \frac{\phi[\phi']^3}{(1 + \phi'^2)^2} = c/2.$$

ed inoltre

$$-f_{\phi'}(\phi(a), \phi'(a)) + \phi(a) = 0.$$

Quest'ultima condizione, se $\phi(a) = 0$ è soddisfatta identicamente, mentre se $\phi(a) > 0$, implica che $\phi'(a) = 1$. Osserviamo che se fosse $\phi(a) = 0$, dalla condizione $(*)$, sarebbe $c = 0$ e quindi $\phi \equiv 0$, pertanto la condizione $\phi(b) = R > 0$ non potrebbe essere verificata. Allora deve essere $0 < \phi(a) < R$. Quest'ultima disuguaglianza è legata all'ipotesi che $\phi' > 0$ in tutto l'intervallo $[a, b]$. Per integrare l'equazione è conveniente usare il parametro $z = \phi'$. Otteniamo le due equazioni:

$$\begin{cases} \phi(z) = \dfrac{c}{2}\dfrac{(1+z^2)^2}{z^3} \\[2ex] \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{1}{\phi'(x)}\dfrac{d\phi}{dz} = \dfrac{c}{2}\left(-\dfrac{2}{z^3} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{3}{z^5}\right) \end{cases}$$

e, utilizzando la condizione iniziale $\phi'(a) = 1$, la soluzione in forma parametrica

$$\begin{cases} x(z) = a + \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{1}{z^2} + \log z + \dfrac{3}{4z^4} - \dfrac{7}{4}\right) \\[2ex] \phi(z) = \dfrac{c}{2}\dfrac{(1+z^2)^2}{z^3}. \end{cases}$$

Inoltre osserviamo che la funzione $g(z) = \frac{(1+z^2)^2}{z^3}$ è decrescente per $|z| < \sqrt{3}$, dunque, da $(*)$ e dal fatto che ϕ è funzione crescente di x, segue che ϕ' è funzione decrescente di x,(questo significa che la ϕ è concava) e quindi il parametro z varia in un intervallo $[z_b, 1]$ dove $x(z_b) = b$ e $x(1) = a$.

Eliminando la costante c dalle espressioni parametriche della soluzione, si ha la funzione

$$F(z) = \frac{x(z) - a}{\phi(z)}.$$

La $F(z_b) = \frac{b-a}{R}$ ci permette di ricavare z_b e quindi che $c = \frac{2z_b^3 R}{(1+z_b^2)^2}$.

Problema 5 Problema isoperimetrico.

Un problema classico è il problema illustrato nell'esempio 1.2 del primo capitolo, cioè il problema isoperimetrico. La teoria finora esposta deve essere *modificata ad hoc* per trattare questo problema. Infatti finora abbiamo considerato estremanti che sono funzioni definite su intervalli della retta reale e quindi rappresentabili graficamente come curve con estremi non coincidenti. Nel caso del problema isoperimetrico dobbiamo considerare curve chiuse e quindi è necessario rappresentare tali curve nella forma parametrica $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$. Il funzionale (1.1), introdotto nel capitolo II, diventa un funzionale che dipende dalle variabili $x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$ dove con $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ abbiamo denotato le derivate di $x(t)$ e $y(t)$ rispetto alla variabile t. Più precisamente, osservando che $dx = \dot{x}dt$, (1.1) si scrive

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

dove $x(t_0) = x(t_1)$ e $y(t_0) = y(t_1)$. La funzione Φ che compare a secondo membro non dipende esplicitamente da t ed è positivamente omogenea di grado uno in $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$, che significa:

$$\Phi(x, y, \lambda\dot{x}, \lambda\dot{y}) \equiv \lambda\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

per ogni $\lambda > 0$.

Viceversa, sia

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

un funzionale la cui integranda non dipende esplicitamente da t ed è positivamente omogenea di grado uno in $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$. Proviamo che il valore del funzionale dipende solo dalla curva del piano definita dalle equazioni $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$ e non dalla particolare rappresentazione parametrica utilizzata per la curva. Infatti se poniamo $t = t(\tau)$ con $dt/d\tau > 0$, $t(\tau_0) = t_0$ e $t(\tau_1) = t_1$ allora si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, dx/d\tau, dy/d\tau)\, d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}(dt/d\tau), \dot{y}(dt/d\tau))\, d\tau \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, (dt/d\tau)\, d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt.
\end{aligned}$$

In questo modo abbiamo provato il seguente teorema.

Teorema 5.1 *Una condizione necessaria e sufficiente perché il funzionale*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

dipenda solo dalla curva del piano x, y definita dalle equazioni parametriche $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$ e non dalla rappresentazione parametrica scelta, è che la funzione integranda Φ non dipenda in modo esplicito dal parametro t e sia positivamente omogenea di grado uno in $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$.

Ora supponiamo che una parametrizzazione della curva trasformi il funzionale (1.1) in

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt.$$

Il problema variazionale per il secondo membro della precedente uguaglianza porta alla coppia di equazioni di Eulero

$$(*) \qquad \Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0 \qquad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}=0}$$

che devono essere equivalenti all'unica equazione di Eulero (3.3) del funzionale (1.1) e che, pertanto, non possono essere indipendenti. Di fatto sono legate dalla relazione

$$(**) \qquad \dot{x}(\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}}) + \dot{y}(\Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}}) \;=\; 0.$$

Per verificare questa relazione utilizziamo il fatto che la funzione

$$\frac{\Phi(x, y, \lambda\dot{x}, \lambda\dot{y})}{\lambda}$$

è indipendente da λ, perché Φ è omogenea di grado uno in λ, dunque derivandola rispetto a λ si ha:

$$(\dot{x}\Phi_{\dot{x}} + \dot{y}\Phi_{\dot{y}})\lambda - \Phi = 0.$$

In particolare per $\lambda = 1$ troviamo che

$$\dot{x}\Phi_{\dot{x}} + \dot{y}\Phi_{\dot{y}} - \Phi = 0.$$

Ora, derivando rispetto a t, si ottiene la $(**)$.

Ritorniamo al problema isoperimetrico dell'esempio 1.2.

Si tratta di trovare la curva chiusa che rende massimo il valore del funzionale

$$AreaD \;=\; \frac{1}{2}\int_{\partial D}[xdy - ydx] \;=\; \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]dt,$$

essendo fissata la sua lunghezza L.

Applicando il teorema 3.1 del capitolo II e tenendo conto di quanto appena detto, si tratta di risolvere il sistema delle due equazioni di Eulero relative al funzionale

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)] + \lambda\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)^{1/2} dt\,,$$

cioè il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}y + \lambda\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = \dfrac{1}{2}\dot{y} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}x + \lambda\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = -\dfrac{1}{2}\dot{x}, \end{cases}$$

dove con λ si è indicato il moltiplicatore di Lagrange. Con facili calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} -y + \lambda\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1 = \text{costante} \\[2ex] x + \lambda\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2 = \text{costante.} \end{cases}$$

Poichè se x e y sono soluzioni, anche $x + c_2$ e $y - c_1$ lo sono, nel sistema precedente si può supporre che le costanti a secondo membro siano nulle. Dalle due equazioni ricaviamo $x^2 + y^2 = \lambda^2$, che rappresenta l'equazione della circonferenza di raggio $|\lambda|$. Dopo aver verificato che le curve di equazioni parametriche $x = \lambda \sin t$ e $y = \lambda \cos t$ se $\lambda > 0$ e $x = -\lambda \sin t$ e $y = \lambda \cos t$ se $\lambda < 0$ soddisfano il sistema di equazioni di Eulero, il problema sarà completamente risolto ricordando che la lunghezza della circonferenza deve essere L e quindi si trova per il moltiplicatore λ il valore $\pm \frac{L}{2\pi}$.

Osserviamo che l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]dt$$

ha un segno che è legato all'orientazione della curva. Di conseguenza le soluzioni del sistema di equazioni di Eulero forniscono valori positivi dell'integrale (massimi) se le circonferenze sono percorse in verso antiorario e valori negativi (minimi) se le circonferenze sono percorse in verso orario.

CAPITOLO IV

IL QUADRO ASTRATTO

§1 INTRODUZIONE

Sia I un funzionale definito su uno spazio di Banach $\mathcal{B}$, cioè $I : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e consideriamo il problema

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\{I(u) : u \in \mathcal{B}.\}$$

Dapprima stabiliamo l'esistenza del minimo sotto le condizioni

(i) $\quad \mathcal{B}$ è uno spazio di Banach riflessivo.

(ii) $\quad$ I è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente, cioè $\liminf_n I(u_n) \geq I(u)$ ogniqualvolta $u_n \rightharpoonup u$.

(iii) $\quad$ I è coercivo su $\mathcal{B}$, cioè $I(u) \geq \alpha\|u\| + \beta$, per ogni $u \in \mathcal{B}$, per qualche $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

La seconda condizione è, in generale, difficile da verificare. Se un funzionale I è semicontinuo inferiormente (s-s.c.i.), cioè se per ogni u e per ogni successione $\{u_n\}$ tale che $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ risulta $I(u) \leq \liminf_n I(u_n)$, allora, in generale, I non è debolmente semicontinuo inferiormente (w-s.c.i). Noi proveremo che i funzionali s-s.c.i. che sono convessi sono anche debolmente semicontinui inferiormente. La classica condizione del primo ordine che ogni minimo u deve soddisfare richiede la definizione seguente

Definizione 1.1 *Dato uno spazio di Banach $\mathcal{B}$, e un funzionale $I : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$, diremo derivata di I in un punto u nella direzione v il limite, se esiste,*

$$lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \frac{I(u + \lambda v) - I(u)}{\lambda} = I'(u, v).$$

Diremo che I è differenziabile secondo Gateaux in u e scriveremo $I'(u) \in \mathcal{B}'$, se il limite precedente esiste per ogni $v \in \mathcal{B}$ e risulta $I'(u, v) \equiv I'(u)(v)$.

La condizione necessaria affinché u sia minimo di I è:

$$I'(u) = 0$$

dove con I' si è denotata la derivata di Gateaux di I.

Tralasciamo tutto quanta riguarda l'equazione di Eulero ed affrontiamo il problema di minimo via metodi diretti : si ottiene il seguente teorema generale.

TEOREMA 1.1 *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach riflessivo, $I : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sia sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente e coercivo su $\mathcal{B}$. Se esiste $\bar{u} \in \mathcal{B}$ tale che $I(\bar{u}) < +\infty$, allora il problema $\mathcal{P}$ ammette almeno una soluzione, cioè esiste u_0 tale che*

$$I(u_0) = \inf\{I(u) : u \in \mathcal{B}\}.$$

DIM. Sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante per $\mathcal{P}$, quindi

$$I(u_n) \longrightarrow \inf \mathcal{P}.$$

Dalle ipotesi abbiamo che $\beta \leq \inf \mathcal{P} \leq I(\bar{u}) < \infty$. Utilizzando la coercività di I possiamo dedurre che esiste un $k > 0$, indipendente da n tale che $\|u_n\| \leq k$. Dal momento che $\mathcal{B}$ è riflessivo, per il teorema 1.8 dell'appendice, possiamo estrarre una successione che indichiamo ancora con $\{u_n\}$ tale che $u_n \rightharpoonup u_0$ in $\mathcal{B}$. L'ipotesi di semicontinuità inferiore implica il risultato.

Nell'esempio 6.2 del cap. II abbiamo visto che, in generale, l'ipotesi di riflessività dello spazio ambiente non può essere eliminata.

§2 CONVESSITÀ E SEMICONTINUITÀ

Come abbiamo detto nell'introduzione, può essere difficile negli esempi concreti, determinare se un funzionale è w-s.c.i. Comunque si può individuare una vasta classe di funzionali che lo sono, si tratta dei funzionali convessi.

In questo paragrafo ci occuperemo della relazione tra convessità e w-s.s.c.i. Allo scopo introduciamo alcune definizioni e alcuni teoremi che saranno utili nel seguito.

Ricordiamo che una funzione $f : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è convessa se per ogni coppia di punti $x, y \in \mathcal{B}$ tali che $f(x), f(y) < +\infty$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ risulta

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Se, nella precedente relazione, vale la disuguaglianza stretta si dice che f è strettamente convessa.

DEFINIZIONE 2.1 *Dato uno spazio di Banach $\mathcal{B}$, denotato con $\mathcal{B}'$ il suo duale e con $\langle\cdot, \cdot\rangle$ l'accoppiamento di dualità, per $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ denotiamo con f^* la sua polare o coniugata definita su $\mathcal{B}'$ dalla posizione:*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{B}}\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\}.$$

Inoltre definiamo bipolare o biconiugata la funzione $f^{**} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *definita da*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}'} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\}.$$

Nell'esempio 6.4 del capitolo II abbiamo già utilizzato la bipolare.

Osserviamo che, per definizione, la polare di una funzione $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, è una funzione convessa. Infine l'inviluppo convesso di f è la funzione $Cf : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definita da:

$$Cf = \sup\{g \leq f : g \quad convessa\}.$$

Definizione 2.2 *Si dice che una funzione* $f : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *è propria se* $f(x) > -\infty$ *per ogni* $x \in \mathcal{B}$ *e se esiste almeno un punto* $\bar{x} \in \mathcal{B}$ *tale che* $f(\bar{x}) < +\infty$.

Di fatto le funzioni proprie sono funzioni a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ma non identicamente uguali a $+\infty$.

Sia $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione affine definita da $f(x) = \langle x, x_0^* \rangle + \lambda$, dove $x_0^* \in \mathcal{B}'$ e λ è un numero reale. Allora la sua polare è data da

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\langle x, x^* - x_0^* \rangle - \lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x^* \neq x_0^* \\ -\lambda & \text{se} \quad x^* = x_0^* . \end{cases}$$

Osservazione Osserviamo che condizione necessaria e sufficiente affinché $f^* \not\equiv +\infty$ è che esista una funzione affine $h(x) = \langle x, x_0^* \rangle + \lambda$, dove $x_0^* \in \mathcal{B}'$ e λ è un numero reale, tale che $h(x) \leq f(x)\ \forall x \in \mathcal{B}$. Analogamente, condizione necessaria e sufficiente affinché $f^* \not\equiv -\infty$ è che esista almeno un $\bar{x} \in \mathcal{B}$ tale che $f(\bar{x}) < +\infty$.

Diamo ora alcune proprietà importanti delle funzioni introdotte nella definizione precedente.

Teorema 2.1 *Sia* $f \geq 0$ *allora* $f^{**} \geq 0$.

Dim. Osserviamo dapprima che se $f_1 \leq f_2$, dalla definizione di polare, risulta che $f_1^* \geq f_2^*$ e quindi anche $f_1^{**} \leq f_2^{**}$. D'altra parte, se proviamo che $f_1 \equiv 0$ implica che $f_1^{**} \equiv 0$, la tesi segue prendendo $f_1 \equiv 0$ e $f_2 \equiv f$. Quindi proviamo che è vera l'implicazione precedente, infatti se $f_1 \equiv 0$ risulta che

$$f_1^*(x^*) = 0^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{B}} \langle x, x^* \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x^* = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad x^* \neq 0 \end{cases}$$

e successivamente

$$f_1^{**}(x) = 0^{**}(x) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}'} \{\langle x, x^* \rangle - 0^*(x^*)\} = 0$$

perché

$$\{\langle x, x^*\rangle \,-\, 0^*(x^*)\} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x^* = 0 \\ -\infty & \text{se} \quad x^* \neq 0. \end{cases}$$

Teorema 2.2 *Siano f e $\mathcal{B}$ come nella definizione 2.1, allora:*

(*i*) *f^* è convessa e semicontinua inferiormente.*

(*ii*) *Se f è convessa e semicontinua inferiormente, allora $f^* \not\equiv +\infty$.*

(*iii*) *In generale risulta $f^{**} \leq Cf \leq f$ e, se f è convessa e semicontinua inferiormente, allora*

$$f^{**} = Cf = f. \tag{2.1}$$

In particolare, se f prende solo valori finiti, allora $f^{**} = Cf$.

(*iv*) *In generale $f^{***} = f^*$.*

Dim. Dal momento che l'applicazione $x^* \longrightarrow \langle x, x^*\rangle - f(x)$ è convessa e continua, allora f^* è convessa e, essendo estremo superiore di funzioni continue, è semicontinua inferiormente. Quindi la (*i*) è provata. Per provare la (*ii*) osserviamo prima che se $f \equiv +\infty$, allora $f^* \equiv -\infty$ e la tesi è provata. Allora possiamo supporre che esiste x_0 nel dominio di f. Prendiamo ora $\alpha_0 < f(x_0)$, l'insieme $\{(x_0, \alpha_0)\}$ è un compatto di $\mathbb{R}^2$. Inoltre l'insieme $\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{B}\}$ è bordo di un chiuso convesso per le ipotesi fatte su f, quindi possiamo applicare il teorema di Hahn-Banach (si veda il teorema 1.2' dell'appendice): esiste un iperpiano chiuso che separa strettamente l'insieme dal punto, cioè esiste α tale che, se $\langle x, x^*\rangle + aa^* = \alpha$ è l'equazione dell'iperpiano, risulta

$$\langle x, x^*\rangle \,+\, f(x)a^* \,>\, \alpha, \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

e

$$\langle x_0, x^*\rangle + \alpha_0 a^* < \alpha.$$

Prendendo $x = x_0$ nella prima di queste disuguaglianze otteniamo subito

$$\langle x_0, x^*\rangle \,+\, f(x_0)a^* \,>\, \alpha > \langle x_0, x^*\rangle + \alpha_0 a^*$$

e quindi $a^* > 0$. Dalle precedenti disuguaglianze si deduce pure che

$$\langle x, -\frac{x^*}{a^*}\rangle \,-\, f(x) < -\alpha/a^*$$

da cui, passando all'estremo superiore su x, segue la tesi.

Per provare la (*iii*) osserviamo dapprima che f^{**} è convessa e semicontinua e che, per definizione $f(x) \geq \langle x, x^*\rangle \,-\, f^*(x^*)$, quindi $f^{**} \leq f$. Allora la disuguaglianza $f^{**} \leq Cf \leq f$ segue immediatamente ricordando la definizione di Cf.

Per provare che, se f è convessa e semicontinua inferiormente, vale la (2.1) consideriamo dapprima il caso in cui $f \geq 0$. Scegliendo x^* nel dominio di f^*, che non è vuoto per la (ii), e definendo

$$g(x) \;=\; f(x) - \langle x, x^* \rangle \;+ f^*(x^*),$$

otteniamo che $g \geq 0$, convessa, semicontinua inferiormente e $g \neq +\infty$. Osserviamo pure che

$$g^{**}(x) \;=\; f^{**}(x) - \langle x, x^* \rangle \;+ f^*(x^*)$$

da cui la tesi $f \;=\; f^{**}$ seguirà dal corrispondente risultato per g. Questo ci consente di assumere che f sia non negativa, convessa, s.s.c.i. e non identicamente $+\infty$. Poichè nella prima parte di questa dimostrazione si è visto che $f^{**} \;\leq\; f$, basterà dimostrare che $f^{**} \geq f$.

Procediamo per assurdo e supponiamo che esista un punto x_0 tale che

$$0 \leq f^{**}(x_0) \;<\; f(x_0).$$

Per il teorema di Hahn-Banach, applicato all'insieme $A = \{(x, y) : x \in domf, y \geq f(x)\}$ e al punto $B = (x_0, f^{**}(x_0))$, esiste un iperpiano di equazione $\langle x, x^* \rangle + aa^* \;=\; \alpha$ che separa strettamente A da B, cioè

$$\langle x, x^* \rangle \;+\; aa^* \;>\; \alpha, \quad \forall (x, a) \in A \tag{2.2}$$

e

$$\langle x_0, x^* \rangle + f^{**}(x_0) a^* < \alpha. \tag{2.3}$$

Ne deduciamo che $a^* \geq 0$ se in (2.2), presa x nel dominio di f, facciamo tendere a a $+\infty$. Sia ora $\epsilon > 0$ e usiamo la (2.2) e la positività di f per avere

$$\langle x, x^* \rangle \;+\; f(x)(a^* + \epsilon) \;>\; \alpha, \quad \forall x \in domf$$

e quindi, dividendo per $-(a^* + \epsilon)$, la seguente disuguaglianza:

$$\langle x, -\frac{x^*}{a^* + \epsilon} \rangle \;-\; f(x) \;<\; -\frac{\alpha}{a^* + \epsilon}, \quad \forall x \in domf.$$

Quest'ultima disuguaglianza implica che $f^*\left(-\frac{x^*}{a^*+\epsilon}\right) \;\leq\; -\frac{\alpha}{a^*+\epsilon}$. Quindi, per la definizione di f^{**} abbiamo:

$$f^{**}(x_0) \geq \langle x_0, -\frac{x^*}{a^* + \epsilon} \rangle \;-\; f^* \left(-\frac{x^*}{a^* + \epsilon} \right) \geq \langle x_0, -\frac{x^*}{a^* + \epsilon} \rangle \;+\; \frac{\alpha}{a^* + \epsilon}$$

e, di conseguenza

$$\langle x_0, x^* \rangle + f^{**}(x_0)(a^* + \epsilon) \geq \alpha.$$

Per $\epsilon \longrightarrow 0$ quest'ultima disuguaglianza contraddice la (2.3) e quindi la (iii) è completamente provata.

Resta da provare la (iv) e cioè che $f^{***} = f^*$. Dal momento che si ha sempre $f^{**} \leq f$, si deduce subito che $f^{***} \geq f^*$. Inoltre, dalla definizione di dualità, per ogni $x \in \mathcal{B}$ e $x^* \in \mathcal{B}'$, abbiamo:

$$\langle x, x^* \rangle - f^{**}(x) \leq f^*(x^*)$$

e quindi, prendendo l'estremo superiore a sinistra, otteniamo $f^{***} \leq f^*$.

Per meglio comprendere le definizioni appena date e le proprietà di queste funzioni facciamo alcuni esempi.

Esempio 2.1 Funzione caratteristica.

Sia $E \subset \mathbb{R}$. Si chiama *funzione caratteristica di* E la funzione definita dalla posizione:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in E \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin E\,. \end{cases}$$

Allora abbiamo $\chi_E^*(x^*) = \sup_{x \in E}\{\langle x, x^* \rangle\}$ che è nota come funzione supporto di E e si può calcolare facilmente. Infatti

$$\chi_E^*(x^*) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x^* = 0 \\ x^* \sup E & \text{se} \quad x^* > 0 \\ x^* \inf E & \text{se} \quad x^* < 0. \end{cases}$$

Applicando ancora la dualità otteniamo $\chi_E^{**}(x) = \chi_{\overline{co}E}(x)$, dove con $\overline{co}E$ si è indicata la chiusura convessa di E. Infatti $\chi_E^{**}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}}\{xy - \chi_E^*(y)\}$. Inoltre, poiché la quantità in parentesi graffa a secondo membro prende i valori: 0 se $y = 0$, $y(x - \sup E)$ se $y > 0$ e $y(x - \inf E)$ se $y < 0$, concludiamo che se $x > \sup E$ oppure $x < \inf E$ risulta $\chi_E^{**}(x) = +\infty$, mentre se $x \in [\inf E, \sup E]$ risulta $\chi_E^{**}(x) = 0$ e quindi $\chi_E^{**}(x) = \chi_{\overline{co}E}(x)$.

Nel caso particolare in cui $E = (0,1)$ e $\mathcal{B} = \mathbb{R}$, tenendo conto del risultato precedente, abbiamo che

$$\chi_{(0,1)} = C\chi_{(0,1)} > \chi_{[0,1]} = \chi_{(0,1)}^{**}.$$

Esempio 2.2 Funzioni di tipo potenza

Siano $\mathcal{B} = \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ e $f(x) = \frac{1}{\alpha}|x|^\alpha$. Allora risulta

$$f^*(x^*) = \frac{1}{\alpha'}|x^*|^{\alpha'}$$

dove $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$.

Analogamente, nel caso di un generico spazio di Banach $\mathcal{B}$, se $f(x) = \frac{1}{\alpha}\|x\|^\alpha$, risulta

$$f^*(x^*) = \frac{1}{\alpha'}\|x^*\|^{\alpha'}.$$

Prima di utilizzare la funziona bipolare di una funzione f e le sue proprietà, enunciamo e dimostriamo alcuni teoremi che stabiliscono i legami fra le proprietà di convessità dell'integranda o del funzionale integrale e la semicontinuità inferiore debole di quest'ultimo.

Teorema 2.3 *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $I : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convesso e semicontinuo inferiormente, allora I è debolmente semicontinuo inferiormente.*

Dim. Sia $\{y_n\} \rightharpoonup \bar{y} \in \mathcal{B}$, vogliamo provare che

$$L = \liminf_n I(y_n) \geq I(\bar{y}). \tag{2.4}$$

A meno di una successione estratta che, per semplicità indichiamo ancora con $\{y_n\}$, possiamo supporre che $L = \lim_n I(y_n)$. Se $L = +\infty$ il risultato è ovvio. Osserviamo pure che $L > -\infty$. Infatti, per la (*iii*) del teorema 2.2, $I \equiv I^{**}$ e, per la definizione di bipolare,

$$I(y_n) = I^{**}(y_n) = \sup_{y^* \in \mathcal{B}'} \{\langle y_n, y^*\rangle - I^*(y^*)\}.$$

Sia ora $y_0^* \in \mathcal{B}'$ tale che $I^*(y_0^*) = \alpha < +\infty$, allora, dalla precedente relazione, per ogni n, si ha

$$I(y_n) \geq \langle y_n, y_0^*\rangle - \alpha \tag{2.5}$$

e, tenendo conto del fatto che $y_n \rightharpoonup \bar{y}$, passando al limite, concludiamo che $L \geq \langle \bar{y}, y_0^*\rangle - \alpha > -\infty$. Fissato ora $\eta > 0$, dalla definizione di limite, esiste $N = N(\eta)$ tale che

$$I(y_n) \leq L + \eta \tag{2.6}$$

per ogni intero $n > N$. Applichiamo il lemma di Mazur (si veda il teorema 1.10 in appendice) alla successione $\{y_n\}_{n>N}$ per ottenere che esistono un intero $\bar{n} = \bar{n}(\epsilon)$ e delle costanti $\alpha_i = \alpha_i(\epsilon) \geq 0$ tali che $\sum_{i=N}^{\bar{n}} \alpha_i = 1$ per cui risulta

$$\|\bar{y} - \sum_{i=N}^{\bar{n}} \alpha_i y_i\| < \epsilon.$$

Dall'ipotesi di convessità di I e dalla (2.6) abbiamo che

$$I\left(\sum_{i=N}^{\bar{n}} \alpha_i y_i\right) \leq \sum_{i=N}^{\bar{n}} \alpha_i I(y_i) \leq L + \eta.$$

Da queste ultime due disuguaglianze, se si tiene conto del fatto che I è inferiormente semicontinuo per ipotesi e se si fa tendere prima ϵ e poi η a zero, si ottiene la tesi (2.4).

Ritorniamo a funzionali del calcolo delle variazioni del tipo:

$$I(u) \ = \int_a^b f(x,u,u')dx.$$

Ci occupiamo ora di stabilire relazioni fra la w-s.c.i. del funzionale I e la convessità dell'integranda $f = f(x,y,z)$ nella variabile z.

Iniziamo enunciando, senza dimostrarlo, un teorema che generalizza il risultato contenuto nel teorema 5.3 del II capitolo.

TEOREMA 2.4 *Sia $f : (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che per ogni $(x,y,z) \in (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

$$|f(x,y,z)| \leq \alpha(x)[|y| + |z|] \tag{2.7}$$

dove $\alpha(x) \in L^{p'}(a,b)$. Se il funzionale I è w-s.c.i. in $W^{1,p}(a,b)$, allora $f(x,y,\cdot)$ è convessa.

TEOREMA 2.5 *Supponiamo che f soddisfi le ipotesi del teorema 2.4 e che il funzionale I sia convesso in $W^{1,p}(a,b)$, allora $f(x,y,\cdot)$ è convessa.*

DIM. Per i teoremi precedenti è sufficiente provare che il funzionale è s.c.i in $W^{1,p}(a,b)$. Dal lemma di Fatou (teorema 4.1 in appendice) applicato alla successione di funzioni $F_n(x) = f(x,u_n(x),u_n'(x)) + \alpha(x)[|u_n| + |u_n'|]$ e alla funzione $\phi(x) = 0$, si ha:

$$\int_a^b \liminf_n [f(x,u_n,{u_n}') + \alpha(x)(|u_n| + |u_n'|)]\, dx \leq \tag{2.8}$$

$$\liminf_n \int_a^b [f(x,u_n,{u_n}') + \alpha(x)(|u_n| + |u_n'|)]\, dx.$$

Osserviamo ora che il funzionale

$$G(x,u,u') = \alpha(x)(|u| + |u'|)$$

è continuo in $W^{1,p}(a,b)$ e quindi, dalla (2.8), si ha che

$$\int_a^b \liminf_n f(x,u_n,{u_n}') \leq \liminf_n \int_a^b f(x,u_n,{u_n}')\, dx.$$

La conclusione si ottiene utilizzando la continuità di $f(x, y, z)$ e il fatto che la convergenza forte della successione u_n alla u in $W^{1,p}(a, b)$ comporta la convergenza uniforme delle u_n e la convergenza quasi ovunque delle u'_n.

I teoremi 2.4 e 2.5 valgono anche in ipotesi di crescita su f più generali della (2.7).

La convessità dell'integranda è di fatto anche condizione sufficiente per avere la w-s.c.i. dell'integrale. Per dimostrarlo, in una situazione meno particolare delle precedenti, introduciamo una classe di funzionali di tipo integrale con integranda funzione di Carathedory:

Definizione 2.3 *Si dice che una funzione $f : (a, b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è di Caratheodory se $f(x, \cdot, \cdot)$ è continua per quasi ogni $x \in (a, b)$ e $f(\cdot, y, z)$ è misurabile in x per ogni coppia $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Una proprietà importante di queste funzioni, che ci limitiamo ad enunciare, è dimostrata in un teorema di Scorza-Dragoni ed afferma che una funzione è di Carathedory se e solo se gode della proprietà seguente: *per ogni compatto K contenuto in (a, b) e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un compatto $K_\epsilon \subset K$ tale che $meas(K - K_\epsilon) \leq \epsilon$ e la funzione ristretta a $K_\epsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è continua.*

A questo punto diamo il teorema:

Teorema 2.6 *Sia (a, b) un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ ed f una funzione di Caratheodory che verifica la condizione*

$$f(x, y, z) \geq \alpha(x)z + \beta(x)$$

per quasi ogni $x \in (a, b)$, per ogni coppia $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e per qualche funzione $\alpha(x) \in L^{q'}(a, b)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ con $q \geq 1$ e $\beta \in L^1(a, b)$. Supponiamo inoltre che $f(x, y, \cdot)$ sia convessa e che

$$\begin{cases} \|y_n - \bar{y}\|_{L^p(a,b)} \longrightarrow 0, & p \geq 1 \\ z_n \rightharpoonup \bar{z} \text{ in } L^q(a, b), & q \geq 1. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} I(\bar{y}, \bar{z}) &= \int_a^b f(x, \bar{y}(x), \bar{z}(x))\, dx \\ &\leq \liminf_n I(y_n, z_n) = \liminf_n \int_a^b f(x, y_n(x), z_n(x))\, dx. \end{aligned}$$

Prima di dimostrare questo teorema, osserviamo che il caso variazionale è un caso particolare, precisamente quello in cui $\bar{z}(x) = \bar{y}'(x)$ e $p = q$; allora, ricordando il teorema di compattezza di Rellich, (teorema 2.3 in appendice) si conclude che il funzionale $I(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$ è w-s.c.i. in $W^{1,p}(a, b)$.

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

LEMMA 2.7 *Nelle ipotesi del teorema, fissato* $\epsilon > 0$ *esistono un sottoinsieme misurabile* $(a,b)_\epsilon \subset (a,b)$*, un intero* N_ϵ *e una successione* n_j *di interi tali che per* $n_j > N_\epsilon$ *risulta che*

$$mis\{(a,b) - (a,b)_\epsilon\} < \epsilon$$

e

$$\int_{(a,b)_\epsilon} |f(x, y_{n_j}(x), z_{n_j}(x)) - f(x, \bar{y}(x), z_{n_j}(x))|\, dx < \epsilon(b-a).$$

Possiamo ora dimostrare il teorema.

DIM. Non lede la generalità supporre $f(x,y,z) \geq 0$, perché altrimenti possiamo sostituire alla f la funzione non negativa definita da

$$\bar{f}(x,y,z) := f(x,y,z) - \alpha(x)z - \beta(x),$$

perché $\alpha(x)z + \beta(x)$ è continua rispetto alla convergenza debole di $z_n \rightharpoonup \bar{z}$ in $L^q(a,b)$.

Inoltre osserviamo che, se

$$L = \liminf_n I(y_n, z_n)$$

allora $L > -\infty$ perché si è supposto $f \geq 0$. Possiamo anche supporre $L < +\infty$ altrimenti il teorema sarebbe banale. Passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo anche supporre che

$$L = \lim_n I(y_n, z_n). \tag{2.9}$$

Fissato $\epsilon > 0$, con le notazioni del lemma precedente, definiamo

$$\chi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a,b)_\epsilon \\ 0 & \text{se } x \in \{(a,b) - (a,b)_\epsilon\} \end{cases}$$

e poniamo

$$g(x,z) = \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), z).$$

Allora $g : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup +\infty$ è una funzione di Caratheodory e $g(x,\cdot)$ è convessa per quasi ogni $x \in (a,b)$. Ne segue che l'integrale

$$G(z) = \int_a^b g(x, z(x))\, dx$$

è convesso e semicontinuo inferiormente su $L^q(a,b)$. Infatti la convessità di G si verifica banalmente tenendo conto della convessità della interanda g rispetto a z.

Inoltre, per provare la semicontinuità inferiore, osserviamo che la convergenza in norma L^q comporta la convergenza quasi ovunque, quindi, per una successione $\{z_n\}$ che converge in L^q a $\bar{z}$ e per quasi ogni $x \in (a,b)$, si ha

$$g(x, z_n(x)) \longrightarrow g(x, \bar{z}(x))$$

dal momento che la g come la f è continua in z. La semicontinuità inferiore di G segue ora dal lemma di Fatou (teorema 4.1 in appendice). Dal teorema 2.3 deduciamo che G è w-s.c.i. quindi se $z_{n_j} \rightharpoonup \bar{z}$ in L^q allora

$$\begin{aligned} G(\bar{z}) &= \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), \bar{z}(x))\, dx \\ &\le \liminf_{n_j} \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), z_{n_j}(x))\, dx = \liminf_{n_j} G(z_{n_j}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Utilizzando ora il lemma 2.7, per n_j sufficientemente grande si ha che

$$\begin{aligned} \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, y_{n_j}(x), z_{n_j}(x))\, dx &\ge \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), z_{n_j}(x))\, dx \\ &\quad - \int_a^b \chi_\epsilon(x) |f(x, y_{n_j}(x), z_{n_j}(x)) - f(x, \bar{y}(x), z_{n_j}(x))|\, dx \\ &\ge \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), z_{n_j}(x))\, dx - \epsilon(b-a) \end{aligned}$$

Usando l'ipotesi che f sia non negativa il primo membro della precedente disuguaglianza si maggiora in modo che si ottiene

$$\int_a^b f(x, y_{n_j}(x), z_{n_j}(x))\, dx \ge \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), z_{n_j}(x))\, dx - \epsilon(b-a).$$

Facendo tendere n_j all'infinito, dalla (2.10) si ha

$$L = \liminf_{n_j} \int_a^b f(x, y_{n_j}(x), z_{n_j}(x))\, dx \ge \int_a^b \chi_\epsilon(x) f(x, \bar{y}(x), \bar{z}(x))\, dx - \epsilon(b-a).$$

A questo punto si fa tendere ϵ a zero, si usa il fatto che $mis\{(a,b) - (a,b)_\epsilon\} \longrightarrow 0$ e si applica il teorema della convergenza monotona (teorema 4.3 in appendice) alla parte destra della precedente disuguaglianza per avere la conclusione.

§3 Esistenza del minimo in spazi di Sobolev

Dato il funzionale

$$I(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

consideriamo il problema

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\left\{I(y)\,:\,y\in W_0^{1,p}(a,b)\right\}.$$

Prima di dimostrare il teorema di esistenza del minimo di $\mathcal{P}$, osserviamo che la condizione che le funzioni, tra cui si cerca il minimo, siano nulle agli estremi può essere modificata ricercando il minimo tra funzioni $y \in W^{1,p}(a,b)$ che assumono valori assegnati agli estremi.

TEOREMA 3.1 *Sia $f : (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Caratheodory che verifica la condizione di coercività:*

$$f(x,y,z) \geq \alpha(x) + c|z|^p$$

per quasi ogni $x \in (a,b)$, per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e per qualche $\alpha(x) \in L^1(a,b), c > 0$ e $p > 1$. Supponiamo che $f(x,y,\cdot)$ sia convessa e che esiste $\bar{y} \in W_0^{1,p}(a,b)$ tale che $I(\bar{y}) < +\infty$. Allora esiste il minimo per il problema $\mathcal{P}$.

DIM. L'ipotesi che esiste $\bar{y} \in W_0^{1,p}(a,b)$ tale che $I(\bar{y}) < +\infty$ garantisce che ha senso porsi il problema della minimizzazione del funzionale nella classe $W_0^{1,p}(a,b)$ perché in essa il funzionale non è identicamente $+\infty$. Dalla ipotesi di coercività data su f, integrando su (a,b) troviamo

$$I(y) \geq \int_a^b \alpha(x)\,dx + c\int_a^b |y'(x)|^p\,dx.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré (si veda il paragrafo 3 dell'appendice), la norma di una funzione $y \in W_0^{1,p}(a,b)$ è equivalente alla norma della sua derivata in $L^p(a,b)$, quindi dalla precedente disuguaglianza troviamo

$$I(y) \geq c_1\|y\|^p_{W_0^{1,p}} + c_2.$$

con $c_1 > 0$ e $c_2 \in \mathbb{R}$ e quindi, tornando allo schema astratto del primo paragrafo di questo capitolo, è verificata la condizione (iii). La condizione (i) è verificata perché l'ipotesi $p > 1$ comporta che lo spazio di Sobolev $W_0^{1,p}$ è uno spazio di Banach riflessivo. La tesi segue quindi dal teorema 1.1 essendo anche verificata la proprietà di w-s.c.i.di $I(y)$ perché la convessità di f consente di applicare il teorema 2.6.

Da un confronto con il teorema di Tonelli si vede che le ipotesi di coercività e di convessità sono presenti in entrambi i teoremi di esistenza del minimo. Si è pure visto che, in assenza di una delle due, esistono controesempi all'esistenza. Nel teorema dimostrato in questo paragrafo risultano indebolite le ipotesi di regolarità su f e quindi è più generale del teorema di Tonelli. Inoltre, come si vedrà più avanti, è interessante osservare che lo schema astratto, utilizzato per provare quest'ultimo, consente di dimostrare teoremi di esistenza anche per funzionali legati ad integrali multipli del C.d.V.

Osserviamo che, per ottenere l'equazione di Eulero per questo funzionale, bisogna imporre delle condizioni di crescita per le derivate f_y e f_z per avere che $I'(y)$ sia ben definito per $y \in W^{1,p}$. Noi non ci occuperemo di questo.

CAPITOLO V

RILASSAMENTO

§1 Fenomeno di Lavrentiev

Quando si studia un problema di minimo per un funzionale è di particolare importanza la classe delle funzioni ammissibili, cioè lo spazio ambiente del problema.

In questo paragrafo dimostriamo che la disuguaglianza stretta

$$\begin{aligned} &\inf\{I(u) : u \in W^{1,1}(a,b),\, u(a) = A, u(b) = B\} \\ &\qquad < \inf\{I(u) \,:\, u \in \mathcal{C}^1([a,b]),\, u(a) = A, u(b) = B\} \end{aligned}$$

può valere anche per funzionali variazionali con una integranda $f = f(x,y,z)$ a crescita superlineare. Si tratta del fenomeno di Lavrentiev che fu scoperto nel 1926 e successivamente fu molto studiato da vari autori.

Un esempio di funzione integranda f di tipo polinomiale, quindi molto regolare, fu presentato da Manià. Discutiamo ora questo esempio nel dettaglio.

Consideriamo l'integrale variazionale

$$I(u) := \int_0^1 (u^3 - x)^2 u'^6 \, dx \tag{1.1}$$

La funzione $u(x) = x^{1/3}$ minimizza il funzionale nella classe

$$\mathcal{A} := \{u \in W^{1,1}(0,1) : u(0) = 0,\, u(1) = 1\}$$

dal momento che $I(u) \geq 0$ per ogni $u \in \mathcal{A}$ e $I(x^{1/3}) = 0$. La stessa funzione minimizza il funzionale I anche nella classe $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}^1(0,1)$.

Si può dimostrare, con qualche artificio e con calcoli non troppo complicati, che esiste una costante positiva $\eta > 0$ tale che $I(u) > \eta > 0$ per ogni funzione $u \in \mathcal{A} \cap Lip(0,1)$. Inoltre, per ogni successione $\{u_k\}$ di funzioni lipschitziane in $\mathcal{A}$ che converge uniformemente a $x^{1/3}$, risulta

$$I(u_k) \longrightarrow +\infty. \tag{1.2}$$

In particolare si ha

$$0 = \inf_{\mathcal{A}} I < \inf_{\mathcal{A} \cap Lip(0,1)} I. \tag{1.3}$$

Le formule (1.2) e (1.3) mostrano che la funzione $x^{1/3}$ non può essere approssimata in *energia* da funzioni di $\mathcal{A} \cap Lip(0,1)$ ed anche che, nel considerare il funzionale (1.1) esteso dalla classe $\mathcal{A} \cap Lip(0,1)$ alla classe $\mathcal{A}$ per mezzo dell'integrale di Lebesgue, abbiamo selezionato una estensione semicontinua di I che non è la migliore estensione, cioè non è la più grande estensione semicontinua $\bar{I}$ di I, essendo

$$\bar{I}(u) = inf\left\{\liminf_n I(u_n) : u_n \in \mathcal{A} \cap Lip(0,1), u_n \rightrightarrows u\, su[0,1]\right\}$$

dove con il simbolo $\rightrightarrows$ 1 si è denotata la convergenza uniforme. La situazione cambia completamente se non richiediamo che le approssimanti u_n verifichino le condizioni agli estremi dell'intervallo: $u_n(0) = 0, u_n(1) = 1$. In questo caso la funzione $x^{1/3}, 0 \leq x \leq 1$, può essere approssimata da funzioni $u_n \in Lip(0,1)$ tali che $u_n \rightrightarrows x^{1/3}$ su $[0,1]$ e $I(u_n) \longrightarrow I(x^{1/3})$, infatti basta prendere

$$u_n(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{se} \quad 1/n \leq x \leq 1 \\ n^{-1/3} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/n. \end{cases}$$

Si può verificare che esiste una successione $u_n \in \mathcal{C}^1[0,1]$ tale che $u_n \rightrightarrows x^{1/3}$ su $[0,1]$ e $I(u_n) \longrightarrow I(x^{1/3})$. Inoltre possiamo approssimare $x^{1/3}$ con una successione di funzioni $\{u_n\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}^1(0,1)$ tali che $u_n \rightrightarrows x^{1/3}$ e $I(u_n) \longrightarrow I(x^{1/3})$ semplicemente prendendo $u_n = u$.
Le precedenti considerazioni provano che la più ragionevole estensione del problema

$$(\mathcal{P}) \qquad min\,\{I(u)\,:\,u \in \mathcal{A} \cap Lip(0,1)\}$$

in generale, non è il problema

$$(\mathcal{P}_1) \qquad min\,\{I(u)\,:\,u \in \mathcal{A}\}$$

ma il problema

$$(\bar{\mathcal{P}}) \qquad min\left\{\bar{I}(u)\,:\,u \in \mathcal{A}\right\}.$$

Il funzionale $\bar{I}$ si chiama *funzionale rilassato* associato ad I e $\bar{\mathcal{P}}$ *problema di minimo rilassato* associato a $\mathcal{P}$. In generale $I(u) \leq \bar{I}(u)$ e il dominio di $\bar{I}$ cioè l'insieme $\{u \in \mathcal{A} : \bar{I}(u) < +\infty\}$ può essere notevolmente più piccolo di $\mathcal{A}$, nonostante che ogni funzione di $W^{1,1}(0,1)$ si può approssimare in $W^{1,1}(0,1)$ con funzioni lipschitziane e persino $\mathcal{C}^\infty([0,1])$.

Uno dei problemi interessanti che sono stati affrontati negli ultimi decenni è quello della rappresentazione del funzionale rilassato $\bar{I}$, cioè ci si è chiesto quando il rilassato $\bar{I}$ di un funzionale del tipo

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

si può rappresentare come un integrale della forma

$$\bar{I}(u) = \int_a^b \bar{f}(x, u(x), u'(x))\, dx$$

e, in caso che ciò sia possibile, quali sia il legame di $\bar{f}$ con la funzione f. Di questo ci occupiamo più avanti, in qualche caso particolare.

È utile la seguente osservazione. Si potrebbe pensare che le difficoltà con il funzionale (1.1) sono legate al fatto che l'integranda $f(x,y,z) = (y^3 - x)^2 z^6$ non è propriamente superlineare ma degenera per $u(x) = x^{1/3}$. In effetti ciò non è vero come prova il seguente ragionamento.

Consideriamo un numero reale σ con $1 < \sigma < 3/2$; allora $x^{1/3} \in W^{1,\sigma}(0,1)$. Quindi possiamo trovare una costante positiva ϵ tale che

$$\epsilon \int_0^1 \left| \frac{d}{dx}(x^{1/3}) \right|^\sigma dx < \eta$$

dove $\eta > 0$ è stato introdotto all'inizio del paragrafo. Consideriamo ora una perturbazione del funzionale (1.1) data da

$$I_1(u) := \int_0^1 [(u^3 - x)^2 u'^6 + \epsilon |u'|^\sigma]\, dx.$$

Risulta $I_1(u) > \eta$ per ogni funzione u in $\mathcal{A}$ con derivata limitata in $(0,1)$, mentre $I_1(x^{1/3}) < \eta$, quindi la (1.3) vale con I_1 al posto di I. L'integranda f_1 di I_1 è non degenere, convessa in z e soddisfa la condizione di crescita

$$\epsilon |z|^\sigma \leq f_1(x,y,z) \leq c_1 |z|^6 + c_2$$

dove c_1 è una costante positiva che dipende dall'estremo superiore di u.

§2 Insieme singolare

L'esempio considerato nel paragrafo precedente ci porta ad alcune osservazioni. In primo luogo la (1.3) dice che l'estremo inferiore del funzionale è più piccolo se non richiediamo limitazioni sulla derivata della minimante. Questo è ovvio se si tiene conto del fatto che l'estremo inferiore di un funzionale è funzione decrescente della classe ambiente rispetto alla relazione di inclusione. In secondo luogo, si vede che può capitare che le minimanti siano singolari in qualche punto se ambientiamo il problema nella classe $W^{1,1}(0,1)$ delle funzioni assolutamente continue su $(0,1)$. Infatti nell'esempio di Manià la minimante $u = x^{1/3}$ presenta una singolarità nell'origine.

Si può dimostrare che ogni sottoinsieme chiuso E di $[a,b]$ di misura nulla può essere l'insieme singolare di una minimante di un integrale variazionale la cui integranda $f(x,y,z)$ ha una crescita superlineare e soddisfa

$$f(x,y,z) \geq c|z|^2 \qquad \forall z$$

dove c è una costante positiva. Infatti sussiste il seguente teorema.

Teorema 2.1 *Sia E un sottoinsieme chiuso di $[a,b]$ di misura nulla e sia*

$$\mathcal{A} := \{u \in W^{1,1}(a,b) \,:\, u(a) = 0, u(b) = 1\}.$$

Allora possiamo trovare delle funzioni $\nu \in \mathcal{A}$ e $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e un numero $\epsilon > 0$ tali che $\psi \geq 0, \psi'' \geq 0$ su $\mathbb{R}, \psi \circ \nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, e che per

$$f(x,y,z) := [\phi(y) - \phi(\nu(x))]^2 \psi(z) + \epsilon z^2$$

abbiamo

(*i*) *Il funzionale $I(u) := \int_a^b f(x,u,u')\,dx$ é dotato di minimo in $\mathcal{A}$.*
(*ii*) *Se u minimizza I nella classe $\mathcal{A}$, allora l'insieme singolare di u coincide con E.*
(*iii*) *Si verifica il fenomeno di Lavrentiev:*

$$\inf_{\mathcal{A}} I < \inf_{\mathcal{A} \cap Lip(0,1)} I.$$

Dim. Per costruire le funzioni ν, ϕ, ψ consideriamo una successione U_k di aperti di $\mathbb{R}$ tali che

$$misU_k < 2^{-k}, \quad \bar{U}_{k+1} \subset U_k, \quad \bigcap_k U_k = E$$

e una successione di funzioni $g_k \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$0 \leq g_k \leq 1,\ g_k = 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R} - U_k,\ g_k = 1 \quad \text{su} \quad \bar{U}_{k+1}.$$

Ora poniamo

$$g := 1 + \sum_{k=1}^\infty g_k, \qquad \alpha := \int_a^b g(x)\,dx.$$

Chiaramente abbiamo

$$g - 1 \in L^2,\ g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} - E),\ g \geq 1 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}, \quad g \geq k \quad \text{su} \quad U_{k+1}.$$

Infine poniamo

$$\nu(t) := \alpha^{-1} \int_a^t g(x)\, dx \quad \text{per} \quad t \in [a, b].$$

Si vede facilmente che

$$\nu \in \mathcal{A},\ \nu' \in L^2(a, b),\ \nu \in \mathcal{C}^\infty([a, b] - E)$$

$$\nu' \geq \alpha^{-1} \quad \text{su} \quad [a, b]$$

$$\nu' \geq k\alpha^{-1} \quad \text{su} \quad U_{k+1}.$$

Sia $F := \nu(E)$; allora F è chiuso e non è denso in alcun sottoinsieme di [0,1]. Ponendo $V := (0, 1) - F$ possiamo scrivere $V = \cup_{n=1}^\infty G_n$, dove $\{G_n\}$ è una successione di compatti tali che $G_n \subseteq G_{n+1}$. Sia h_n di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tale che $h_n = 0$ fuori di G_n, $h_n \geq 0$ su $\mathbb{R}$, e $h_n > 0$ su G_{n-1} e definiamo

$$\phi_n(t) := \int_0^t h_n(x)\, dx;$$

allora $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi_n \circ \nu \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$. Fissato un intero n, scegliamo $\delta_n > 0$ tale che per $k = 0, 1, ..., n$ risulti

$$\delta_n |D^k \phi_n(t)| \leq 2^{-n}, \quad \delta_n |D^k \phi_n \circ \nu(t)| \leq 2^{-n} \quad \text{per} \quad t \in [a, b],$$

e definiamo

$$\phi = \sum_n \delta_n \phi_n;$$

questa serie e quelle che si ottengono derivando convergono uniformemente su $\mathbb{R}$. Dal momento che $\phi' = \sum_n \delta_n h_n$ e quindi $\phi' > 0$, noi concludiamo che $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \phi \circ \nu \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ e ϕ è strettamente crescente su $[0, 1]$.

Per ogni $t \in [0, 2\alpha]$ definiamo

$$\eta(t) := \inf\{[\phi(x) - \phi(y)]^2 \ : \ x, y \in [0, 1], |x - y| \geq t/2\alpha\} \tag{2.1}$$

Dal momento che ϕ è continua e strettamente crescente su $[0, 1]$, η è continua e crescente su $[0, 2\alpha], \eta(0) = 0$ e $\eta(t) > 0$ per $0 < t < 2\alpha$.

Per $k = 1, 2, ...$ sia $d_k := dist(E, \mathbb{R} - U_k)$ in modo che d_n decresce a zero. Definiamo ρ su $(0, +\infty)$ nel modo seguente

$$\rho(d_n) := (n-2)\alpha^{-1}/8, \quad n = 3, 4, ..$$

estendendo ρ a una costante su $[d_3, \infty)$ e ponendola lineare su ogni intervallo $[d_{n+1}, d_n]$ per $n = 3, 4, ...$

Allora ρ è continua e decrescente e $\lim_{t \longrightarrow 0} \rho(t) = +\infty$. Dalle proprietà di ν, abbiamo

$$\nu'(t) \geq 8\rho(dist(t, E)), \quad \forall t \in [a, b] - E.$$

Inoltre ρ è strettamente decrescente su $(0, d_3]$ ed ha una inversa continua e decrescente ρ^{-1} su $(\alpha^{-1}/8, +\infty)$.

La funzione

$$h(t) := \frac{t}{\rho^{-1}(t)\eta(\rho^{-1}(t))}$$

dove η è data dalla (2.1), è positiva, continua e crescente su $[\alpha^{-1}/8, +\infty]$.

Estendiamo h ad una funzione continua e crescente su $[0, +\infty)$, con $h = 0$ su $[0, \beta]$ per qualche $\beta > 0$. Infine, per $t \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\psi(t) := h(1)\left(\frac{t}{\beta}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} h(n+1)\left(\frac{t}{n}\right)^{k_n}$$

dove i k_n sono interi positivi scelti in modo tale che la serie di potenze ha un raggio di convergenza infinito. Allora si ha che $\psi(t) > h(n+1)$ per $t \in [n, n+1]$, n=1,2,...,quindi

$$\psi(t) > h(t), \quad t \geq 0,$$

e $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \psi \geq 0, \psi'' \geq 0, \psi(0) = 0$.

La chiave della dimostrazione del teorema è nel seguente lemma.

LEMMA 2.2 *Supponiamo che $u \in \mathcal{A}$ e che per qualche $t_0 \in E$ la derivata $u'(t_0)$ esiste ed è finita. Allora*

$$I_0(u) := \int_a^b [\phi(u(x)) - \phi(\nu(x))]^2 \phi(u'(x))\, dx \geq \alpha^{-1}/8.$$

Per brevità rinunciamo a dimostrare il lemma e continuiamo la prova del teorema.

Scegliamo $\epsilon > 0$ in modo tale che per $v \in \mathcal{A}$ risulti

$$8\alpha \int_a^b v'^2(t)\,dt < 1/\epsilon,$$

e osserviamo che

$$I(v) = \epsilon \int_a^b v'^2(t)\,dt < \alpha^{-1}/8$$

dal momento che $I_0(\nu) = 0$. La (i) dell'enunciato segue allora dal teorema di Tonelli.

Sia allora u una minimante di I in $\mathcal{A}$. Allora $I(u) \leq I(\nu) < \alpha^{-1}/8$, da cui segue che $I_0(u) < \alpha^{-1}/8$ e, dal lemma enunciato prima, l'insieme singolare E_0 di u contiene E, quindi la (iii) vale. Per completare la dimostrazione basta verificare che E_0 non contiene punti al di fuori di E.

Osserviamo dapprima che se u minimizza I, allora u è monotona crescente su $[a, b]$. Infatti se così non fosse esisterebbero due punti t_0, t_1 con $a \leq t_0 < t_1 \leq b$ tali che $u(t_0) = u(t_1)$, allora potremmo diminuire il valore del funzionale $I(u)$ prendendo u costante su $[t_0, t_1]$. Supponiamo, ragionando per assurdo, che $E_0 - E$ non sia vuoto e sia $t \in E_0 - E$. Possiamo supporre che t sia l'estremo destro di un intervallo $J \subset [a, b]$ su cui u è regolare (se fosse l'estremo sinistro di un $J \subset [a, b]$ si ragionerebbe in modo analogo). L'equazione di Eulero

$$\frac{d}{dx} f_z = f_y$$

vale su J ed abbiamo

$$f_y(\cdot, u, u') = 2\phi'(u)[\phi(u) - \phi(\nu)]\psi(u'),$$

$$f_z(\cdot, u, u') = [\phi(u) - \phi(\nu)]^2 \psi'(u') + 2\epsilon u'.$$

Ora, poichè u è monotona crescente e t è nell'insieme singolare E_0 di u, abbiamo $\lim_{s \longrightarrow t, s \in J} u'(s) = +\infty$. Quindi, per $s \longrightarrow t, s \in J$, si ha

$$f_z(s, u(s), u'(s)) \longrightarrow +\infty. \tag{2.2}$$

Se $u(t) \neq \nu(t)$ abbiamo

$$|f_y(x, u(x), u'(x))| \leq C f(x, u(x), u'(x))$$

per x prossimo a t e quindi $f_y \in L^1(s, t)$ per s prossimo a t. Per l'equazione di Eulero questo contraddice la (2.2). D'altra parte se $u(t) = \nu(t)$, dalle relazioni

$u'(t) = \infty$ e $\nu'(t) < \infty$ deduciamo che esistono $s < t$ tali che $u(x) < \nu(x)$, per $s < x < t$. Allora $f_y(x, u(x), u'(x)) < 0$ per $s < x < t$ in modo che, dall'equazione di Eulero $f_z(x, u(x), u'(x))$ è decrescente su questo intervallo, che contraddice di nuovo la (2.2).

§3 Funzionale rilassato

Nel primo paragrafo abbiamo introdotto i concetti di funzionale e problema rilassato in relazione al funzionale (1.1) e ad un particolare problema ad esso relativo.

Vogliamo ora introdurre il concetto di rilassamento in generale e in astratto per applicarlo poi a tutte le situazioni in cui ci sarà utile. Si è osservato che, se il funzionale non è s.c.i. oppure se lo spazio ambiente del problema non è dotato di proprietà di compattezza, non è detto che esista il minimo. Abbiamo anche fornito controesempi (si veda il paragrafo 6 del capitolo II). In alcuni di questi casi (assenza di convessità e quindi di semicontinuità inferiore, si veda l'esempio 6.4) è possibile ugualmente provare l'esistenza del minimo, ricorrendo ad un funzionale in qualche modo legato al funzionale che si vuole minimizzare. In altri casi, poichè il minimo non esiste perché manca la compattezza delle successioni minimizzanti, si deve estendere lo spazio ambiente, in modo da recuperare la compattezza e si deve estendere in modo appropriato il funzionale a questa classe più ampia in modo da non perdere la proprietà di semicontinuità inferiore. Per essere piú precisi il funzionale esteso alla classe piú ampia deve essere tale che il suo estremo inferiore coincida con l'estremo inferiore del funzionale di partenza nella classe di partenza. In questo modo, poichè il funzionale esteso, via metodi diretti, ammette un minimo, si può almeno concludere che le successioni minimizzanti del funzionale iniziale convergono verso il minimo del funzionale esteso. Naturalmente non sempre questo è possibile.

Diamo alcune definizioni

Definizione 3.1 *Data una funzione $f : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}$, per ogni $x \in \mathcal{B}$, definiamo*

$$sc^-(f)(x) = \sup_{g \in \mathcal{S}(f)} g(x),$$

dove $\mathcal{S}(f) = \{g : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}} :\ g \text{ s.c.i. e } g(x) \leq f(x)\ \forall x \in \mathcal{B}\}$.

La funzione $sc^-(f)$ si chiama inviluppo semicontinuo inferiormente di f ed è la più grande funzione s.c.i. minorante f. Osserviamo che, dal momento che ogni funzione w-s.c.i. è anche s.c.i., la funzione $sc^-(f)$ appena definita è l'inviluppo semicontinuo inferiormente di f rispetto alla convergenza debole.

Il seguente teorema stabilisce una relazione fra l'inviluppo semicontinuo inferiormente di una funzione e la sua bipolare definita nel paragrafo 2 del capitolo IV.

Teorema 3.1 *Sia $f : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funzione assegnata. Supponiamo che esista una funzione affine e continua $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(x) \leq f(x)\ \ \forall x \in \mathcal{B}$. Allora risulta*

$$f^{**} = sc^{-}(Cf)$$

dove Cf denota la massima funzione convessa minorante f.

Dim. Se $f(x) \equiv +\infty$ allora essa è convessa e continua e la tesi è ovvia. Se $f \not\equiv +\infty$, dall'ipotesi che esiste una funzione affine e continua $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(x) \leq f(x)\ \ \forall x \in \mathcal{B}$, segue che f è propria e che $h \leq sc^{-}(Cf) \leq f$. Quindi anche $sc^{-}(Cf)$ è una funzione propria, quindi, dal teorema 2.2 del capitolo IV, $(sc^{-}(Cf))^{**} = sc^{-}(Cf)$. Per concludere basta provare che

$$f^{**} = (sc^{-}(Cf))^{**}. \tag{3.1}$$

Osserviamo che, dalla sua definizione, f^{*} risulta convessa e s.c.i.; quindi, tenendo conto che f^{**} è la polare di f^{*}, anche f^{**} risulta convessa e s.c.i.. Inoltre, sempre tenendo conto delle definizioni, $f^{**} \leq Cf$ e quindi

$$f^{**}(x) \leq sc^{-}(Cf)(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{B}. \tag{3.2}$$

Inoltre $f \leq g$ comporta $f^{**} \leq g^{**}$ e, applicando la (iv) del teorema 2.2 del capitolo IV alla f^{*} in luogo di f, otteniamo $f^{****} = f^{**}$, quindi dalla (3.2) si ottiene

$$f^{**}(x) \leq (sc^{-}(Cf))^{**}(x) \leq f^{**}(x) \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

da cui la (3.1). Pertanto la prova è completa.

Osserviamo che nel precedente teorema l'ipotesi che esista una funzione affine e continua minorante f è essenziale. Infatti, in caso contrario può accadere che $f^{**} < sc^{-}(Cf)$. Ad esempio, sia

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x \neq 0, \\ -\infty & \text{se} \quad x = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

In tal caso si ottiene facilmente che $f = sc^{-}(Cf)$, mentre $f^{**} \equiv -\infty$ e quindi $f^{**} < sc^{-}(Cf)$. Osserviamo pure che tale anomalia, in realtà, non dipende dal fatto che la funzione f definita in (3.3) non è una funzione propria, perché se consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x < 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \\ -\frac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

si vede che essa è propria e risulta

$$sc^-(Cf) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x \neq 0, \\ -\infty & \text{se} \quad x = 0, \end{cases}$$

mentre $f^{**} \equiv -\infty$, pertanto si ha di nuovo che $f^{**} < sc^-(Cf)$.

Sia ora $\mathcal{B} = W^{1,p}$ e sia $I : \mathcal{B} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un funzionale assegnato del tipo

$$I(u) = \int_a^b g(x, u, u')\, dx, \tag{3.4}$$

dove la funzione integranda verifica la condizione di crescita

$$g(x, y, z) \geq \lambda |z|^p - \alpha(x) \tag{3.5}$$

per $p > 1, \lambda > 0$ e $\alpha(x) \in L^1(a, b)$. Allora il funzionale rilassato $\bar{I} = sc^-(I)$ introdotto nella definizione 3.1 può essere anche ottenuto dalla formula:

$$\bar{I}(u) = \inf\{\liminf_n I(u_n) : \ \{u_n\} \subset \mathcal{B}\, , u_n \rightharpoonup u \in \mathcal{B}\}. \tag{3.6}$$

Per le applicazioni è utile il teorema

TEOREMA 3.2 *Dato il funzionale I definito in (3.4), con g soddisfacente la condizione (3.5), il suo rilassato $\bar{I}$ è caratterizzato dalle condizioni:*

(*i*) *per ogni $u \in W^{1,p}(a, b)$ e per ogni successione $\{u_n\} \subset W^{1,p}(a, b) : u_n \rightharpoonup u$ risulta*

$$\bar{I}(u) \leq \liminf_n I(u_n);$$

(*ii*) *per ogni $u \in W^{1,p}(a, b)$ esiste una successione $\{\bar{u}_n\} \subset W^{1,p}(a, b) : \bar{u}_n \rightharpoonup u$ tale che*

$$\bar{I}(u) \geq \limsup_n I(\bar{u}_n).$$

Non dimostriamo questo teorema, di cui ci interessa essenzialmente l'applicazione al successivo

Teorema 3.3 *Sia $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ una funzione di Caratheodory che verifica la condizione di crescita (3.5). Sia I il funzionale definito in (3.4) e sia $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,p}(a,b) : u(a) = u(b) = 0\}$. Allora il funzionale rilassato $\bar{I}(u)$ ammette minimo in $\mathcal{A}$ e risulta*

$$\inf_{\mathcal{A}} I(u) = \min_{\mathcal{A}} \bar{I}(u). \tag{3.7}$$

Inoltre per ogni punto di minimo $u_0 \in \mathcal{A}$ di $\bar{I}(u)$ esiste una successione $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ minimizzante per I e convergente debolmente ad $u_0 \in \mathcal{A}$. Infine ogni successione minimizzante per I ammette una sottosuccessione convergente debolmente ad un punto di minimo di $\bar{I}$.

Dim. Se il funzionale $I \equiv +\infty$ non c'è nulla da dimostrare in quanto, in tal caso, si ha $I(u) = \bar{I}(u)$. Assumiamo quindi che I sia un funzionale proprio. Dalla (3.5), integrando su (a,b) si ottiene

$$I(u) \geq \bar{I}(u) \geq \lambda \int_a^b |u'(x)|^p \, dx - \int_a^b \alpha(x) \, dx.$$

Pertanto $\bar{I}$, che per definizione è debolmente s.c.i., è anche coercivo su $\mathcal{A}$ che è uno spazio di Banach riflessivo per l'ipotesi $p > 1$. Allora, per il teorema 1.1 del capitolo IV, $\bar{I}$ ammette almeno un punto di minimo in $\mathcal{A}$.

Poichè $\bar{I} \leq I$, si ricava subito che $\min_{\mathcal{A}} \bar{I}(u) \leq \inf_{\mathcal{A}} I < +\infty$. Per ottenere la disuguaglianza opposta, osserviamo che, posto $c = \inf_{\mathcal{A}} I < +\infty$, si ha che il funzionale $H : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definito da $H(u) = c$ è costante, quindi debolmente s.c.i. e minora I su $\mathcal{A}$, pertanto $c = H(u) \leq \bar{I}(u)$ per ogni $u \in \mathcal{A}$. Quindi, in particolare, $c \leq \min_{\mathcal{A}} \bar{I}(u)$ che conclude la dimostrazione della (3.7).

Sia ora u_0 un punto di minimo per $\bar{I}$ e sia $\{\bar{u}_n\} \subset \mathcal{A}$ una successione, convergente debolmente ad $u_0 \in \mathcal{A}$, che soddisfa la condizione (ii) del teorema 3.2. Allora

$$\min_{\mathcal{A}} \bar{I}(u) = \bar{I}(u_0) \geq \limsup_n I(\bar{u}_n) \geq \liminf_n I(\bar{u}_n) \geq \inf_{\mathcal{A}} I(u). \tag{3.8}$$

Dalle (3.7) e (3.8) segue facilmente che

$$\lim_n I(\bar{u}_n) = \inf_{\mathcal{A}} I(u),$$

e quindi $\{\bar{u}_n\}$ è una successione minimizzante per I.

Infine sia $\{u_n\}$ è una successione minimizzante per I, cioè

$$\lim_n I(u_n) = \inf_{\mathcal{A}} I.$$

Dalla condizione di crescita richiesta su g si ottiene che la $\{u_n\}$ è limitata nella norma di $W^{1,p}$, quindi, a meno di una estratta che indichiamo allo stesso modo, $u_n \rightharpoonup u_0 \in \mathcal{A}$ e

$$\min_{\mathcal{A}} \bar{I} = \inf_{\mathcal{A}} I = \lim_n I(u_n) \geq \bar{I}(u_0) \geq \min_{\mathcal{A}} \bar{I},$$

di conseguenza u_0 è punto di minimo per $\bar{I}$ su $\mathcal{A}$.

Osserviamo che il precedente teorema vale anche in un contesto più generale; per quanto riguarda la possibilità di estenderlo a funzionali del C.d.V. legati ad integrali multipli ce ne occuperemo più avanti ma vogliamo sottolineare da ora che lo schema astratto che si seguirà è esattamente quello seguito finora.

Ci domandiamo ora se il funzionale rilassato, sotto qualche condizione, si possa rappresentare in forma integrale come il funzionale di partenza, quindi ci occupiamo di fornire una rappresentazione esplicita del funzionale $\bar{I}$. A questo scopo saranno utili alcune osservazioni preliminari.

Consideriamo d'ora in avanti il funzionale (3.4) con g che non dipende esplicitamente da y, quindi $g = g(x, z)$ e indichiamo con $g^*(x, z)$ e $g^{**}(x, z)$ rispettivamente la polare e la bipolare di g rispetto alla variabile z. Ricordando la definizione 2.1 del capitolo IV, si ha

$$g^*(x, z^*) = \sup_{z \in \mathbb{R}} [z \cdot z^* - g(x, z)]$$

e

$$g^{**}(x, z) = \sup_{z^* \in \mathbb{R}} [z \cdot z^* - g^*(x, z^*)].$$

Si può dimostrare che, se g è una funzione di Caratheodory che verifica una condizione del tipo

$$\lambda |z|^p \leq g(x, z) \leq \Lambda(|z|^p + 1) \quad \text{per quasi ogni} \quad x \in (a, b),\ \forall z \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

dove $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$, allora g^* e g^{**} sono funzioni di Caratheodory che verificano condizioni di crescita dello stesso tipo.

Sussiste il seguente lemma.

LEMMA 3.4 *Sia $g : (a, b) \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione di Caratheodory che verifica la condizione di crescita (3.9). Siano I ed $\mathcal{A}$ come nel precedente teorema 3.3. Allora, per ogni $u \in \mathcal{A}$, esiste una successione di funzioni $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{A}$ e*

$$\left| \int_a^b g(x, {u_n}') \, dx - \int_a^b g^{**}(x, u') \, dx \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Tralasciamo la dimostrazione di questo lemma che utilizziamo per dimostrare il teorema seguente.

Teorema 3.5 *Sia $g : (a,b) \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ una funzione di Caratheodory che verifica la condizione di crescita (3.9). Siano I ed $\mathcal{A}$ come nel precedente teorema 3.3. Allora*

$$\bar{I}(u) = \int_a^b g^{**}(x,u')\,dx \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Dim. Sia $u \in \mathcal{A}$ e sia $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ la successione di funzioni ottenuta nel lemma 3.4. Allora, tenendo conto anche della (3.6) e del lemma precedente, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{I}(u) \leq \liminf_n I(u_n) &= \liminf_n \int_a^b g(x,{u_n}')\,dx \\ &\leq \liminf_n \left[\int_a^b g^{**}(x,u')\,dx + \frac{1}{n}\right] \\ &= \int_a^b g^{**}(x,u')\,dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

D'altra parte se poniamo

$$\tilde{H}(u) := \int_a^b g^{**}(x,u')\,dx,$$

dal teorema 2.6 del capitolo IV e delle osservazioni che seguono, si ottiene che $\tilde{H}$ è convesso e debolmente s.c.i. e quindi, poichè $\tilde{H} \leq I$, si ha $\tilde{H}(u) \leq \bar{I}(u), \forall u \in \mathcal{A}$. Quest'ultima relazione, insieme alla (3.10) ci porta alla conclusione

$$\bar{I}(u) = \tilde{H}(u) = \int_a^b g^{**}(x,u')\,dx \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

In particolare abbiamo ottenuto che $\bar{I}$ è anche convesso.

Teorema 3.6 *Nelle ipotesi del teorema precedente risulta*

$$\bar{I} \equiv I^{**}.$$

Dim. Dal momento che I^{**} è convesso e s.c.i., dalla *(iii)* del teorema 2.2 del capitolo IV segue $I^{**} \leq I$ e, dalla definizione di $\bar{I}$, anche $I^{**} \leq \bar{I}$. Inoltre, dalla condizione di crescita (3.9) e dal teorema 3.5, anche al funzionale $\bar{I}$ si può applicare il teorema 2.2 del capitolo IV, per cui $\bar{I}^{**} \equiv \bar{I}$. D'altra parte, essendo $\bar{I} \leq I$, risulta pure $\bar{I}^{**} \leq I^{**}$.

Mettendo insieme le relazioni precedenti si ha

$$I^{**} \leq \bar{I} = \bar{I}^{**} \leq I^{**},$$

che conclude la dimostrazione.

Riassumendo,nelle ipotesi fatte, abbiamo ottenuto che il funzionale

$$\bar{I}(u) = \int_a^b g^{**}(x, u')\, dx,$$

ammette almeno un minimo $u \in \mathcal{A}$. Ogni punto di minimo per $\bar{I}(u)$ è candidato ad essere un minimo per $I(u)$ nella classe $\mathcal{A}$ delle funzioni ammissibili. Se per una $u_0 \in \mathcal{A}$ risulta $\bar{I}(u_0) = I(u_0)$, allora tale funzione u_0 è anche un minimo di $I(u)$ in $\mathcal{A}$ e quindi si è ottenuta una soluzione del problema di partenza. Se, invece, $\bar{I}(u_0) < I(u_0)$ per ogni soluzione $u_0 \in \mathcal{A}$ del problema di minimo per $\bar{I}(u)$ allora il problema originale relativo ad I non ha soluzione. In questo caso si può solo dire che i valori minimi $\bar{I}(u_0)$ sono limiti di successioni minimizzanti di I.

Osservazione Dai precedenti risultati si vede che il funzionale I e il suo inviluppo convesso CI hanno lo stesso funzionale rilassato. Infatti, dal momento che $CI \leq I$, risulta $\bar{C}I \leq \bar{I}$. D'altra parte, dal teorema 3.6, $\bar{I}$ è convesso e quindi $\bar{I} \leq CI$ da cui $\bar{I} \leq \bar{C}I$.

Inoltre, ricordando che nelle ipotesi di crescita su g, dal teorema 3.1, si ha $g^{**} = sc^- Cg$,

$$\bar{I}(u) = \int_a^b (sc^- Cg)(x, u'(x))\, dx$$

e, tenendo conto del fatto che una funzione a valori reali, convessa è continua, in definitiva si ha

$$\bar{I}(u) = \int_a^b Cg(x, u'(x))\, dx.$$

A questo punto è naturale chiedersi se e come si possa rappresentare il funzionale polare I^* in termini della polare della funzione integranda g. Nella letteratura esistono risultati al riguardo, ma proseguiremo in una diversa direzione.

CAPITOLO VI

CALCOLO DELLE VARIAZIONI PER INTEGRALI MULTIPLI IN CLASSE DI LIPSCHITZ

§1 Minimizzazione in classe di Lipschitz

I funzionali introdotti negli esempi 1.4 e 1.5 del primo capitolo rientrano in una classe più generale di quella dei funzionali considerati finora.

Nel seguito Ω sarà un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e

$$f(x,y,z) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

una funzione con le proprietà

(*i*) f è misurabile secondo Lebesgue in (x,y,z)

(*ii*) f è continua in y per ogni z, uniformemente rispetto a x

(*iii*) f è convessa nella variabile z per ogni x, y. e ha tutte le derivate parziali $f_{z_i}(x,y,z)$ continue in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Consideriamo il funzionale

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx \tag{1.1}$$

definito nello spazio $Lip(\bar{\Omega})$ delle funzioni u continue su $\bar{\Omega}$ che verificano una condizione del tipo

$$|u(x) - u(\bar{x})| \leq k|x - \bar{x}| \quad \forall x, \bar{x} \in \bar{\Omega}.$$

Chiameremo costante di Lipschitz di u e la indicheremo con [u], la più piccola costante k che verifica la condizione precedente, cioè'

$$[u] = \sup_{x,\bar{x} \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(\bar{x})|}{|x - \bar{x}|}.$$

Lo spazio $Lip(\bar{\Omega})$ munito della norma

$$\|u\|_{0,1} := \|u\|_0 + [u] = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + [u]$$

è uno spazio di Banach. Inoltre, poichè le funzioni lipschitziane sono differenziabili quasi ovunque, il funzionale $I(u)$ introdotto in (1.1) è ben definito.

Data ora una funzione $\varphi \in Lip(\bar{\Omega})$, denotiamo con $\mathcal{A}$ la classe delle funzioni in $Lip(\bar{\Omega})$ che coincidono con φ sul bordo $\partial\Omega$ dell' aperto Ω. Ha senso porsi il problema seguente

$$\min\{I(u) : u \in \mathcal{A}\}. \tag{1.2}$$

Sotto opportune condizioni questo problema variazionale ha soluzione. Nel seguito si potranno vedere molte analogie con il caso degli integrali unidimensionali e lo schema astratto che seguiremo è quello precedentemente illustrato.

In primo luogo proviamo un teorema di semicontinuità.

TEOREMA 1.1 *Il funzionale (1.1) è s.c.i. rispetto alla convergenza uniforme sui limitati di* $Lip(\bar{\Omega})$.

DIM. Introduciamo la definizione seguente:

$$Lip_L(\Omega) := \{u \in Lip(\bar{\Omega}) : \|u\|_{0,1} \leq L\}.$$

È facile provare che $Lip_L(\Omega)$ è compatto utilizzando il teorema di Ascoli-Arzelà.

Sia ora $\{u_k\}$ una successione di elementi di $Lip_L(\Omega)$; che converge uniformemente ad una funzione $u \in Lip_L(\Omega)$, cioè $\|u_k - u\|_0 \to 0$. Vogliamo provare che $I(u) \leq \liminf_k I(u_k)$.

Dalla (iii) si ha :

$$\begin{aligned} I(u) - I(u_k) &= \int_\Omega [f(x, u(x), Du(x)) - f(x, u(x), Du_k(x))]dx \\ &\quad + \int_\Omega [f(x, u(x), Du_k(x)) - f(x, u_k(x), Du_k(x))]dx \\ &\leq \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, u(x), Du(x)) D_i(u - u_k)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega [f(x, u(x), Du_k(x)) - f(x, u_k(x), Du_k(x))]dx \end{aligned} \tag{1.3}$$

Le funzioni $x \in \Omega \to f_{z_i}(x, u(x), Du(x))$ si possono approssimare con funzioni $\psi^i_\epsilon(x) \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ nella norma di $L^1(\Omega)$, quindi, per ogni $\epsilon > 0$, esistono $\psi^i_\epsilon(x) \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, $i = 1, 2, ..$ tali che

$$\int_\Omega |f_{z_i}(x, u(x), Du(x) - \psi^i_\epsilon(x)| dx < \epsilon.$$

Ne segue che

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, u(x), Du(x)) D_i(u - u_k)\, dx \right| \\
&\qquad \le \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^n [f_{z_i}(x, u(x), Du(x)) - \psi_\epsilon^i(x)] D_i(u - u_k)\, dx \right| \\
(1.4) \qquad &\qquad + \left| \int_\Omega \psi_\epsilon^i(x) D_i(u - u_k)\, dx \right| \le (\|u\|_{0,1} + \|u_k\|_{0,1}) \sum_{i=1}^n \int_\Omega |f_{z_i} - \psi_\epsilon^i| dx \\
&+ \int_\Omega |D_i \psi_\epsilon^i(x)(u - u_k)|\, dx \le 2Ln\epsilon + cost\|u - u_k\|_0,
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo integrale si è ottenuto con una integrazione per parti. D'altra parte, sui limitati di $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f(x, y, z)$ è uniformemente continua in y pertanto per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|u - u_k\|_0 < \delta$, risulta

$$|f(x, u, Du_k) - f(x, u_k, Du_k)| < \epsilon.$$

Dunque per $k >>$

$$\left| \int_\Omega [f(x, u(x), Du_k(x)) - f(x, u_k(x), Du_k(x))] dx \right| < \epsilon |\Omega|, \tag{1.5}$$

dove $|\Omega|$ denota la misura di Ω. In definitiva da (1.4) e (1.5), per ogni $k >>$ e per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$I(u) - I(u_k) \le cost(\epsilon + \|u - u_k\|_0)$$

da cui si conclude, passando al limite inferiore su k,

$$I(u) \le \liminf_k I(u_k).$$

Il problema (1.2) ha dunque una soluzione u_L su ogni palla $Lip_L(\Omega)$ dello spazio $Lip(\bar{\Omega})$ perché c'è semicontinuità e compattezza insieme; inoltre $\|u_L\|_{0,1} \le L$.

Osservazione In particolare, se $\|u_L\| < L$ e se $I(u)$ è un funzionale convesso allora u_L fornisce un minimo su $\mathcal{A}$: infatti in tal caso si può prendere $v \in \mathcal{A}$ e t un numero reale tale che $|t| <<$ in modo che la funzione $u_L + t(v - u_L) \in Lip_L(\Omega)$ e, dal risultato precedente, $I(u_L) \le I(u_L + t(v - u_L))$. Ne segue che la funzione $\phi(t) = I(u_L + t(v - u_L))$ ha un minimo locale per $t = 0$. Se $\phi(t)$ è una funzione convessa, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\phi(t) \ge \phi(0) + \phi'(0)t$$

da cui, essendo $\phi'(0) = 0$ si ha $\phi(t) \geq \phi(0)$ e, per $t = 1$ e per la definizione di ϕ, $I(u_L) \leq I(v)$.

Per poter concludere che u_L è minimo in $\mathcal{A}$ e quindi che il problema (1.2) ha soluzione, è sufficiente supporre che $\phi(t)$ sia convessa. Questo si verifica, nelle ipotesi fatte, quando l'integranda $f(x, y, z)$ non dipende esplicitamente da x e da y quindi d'ora in avanti fino a quando non sarà esplicitamente affermato, la funzione integranda sarà del tipo $f(x, y, z) = f(z)$.

Osserviamo pure che, se $f(z)$ è strettamente convessa, il minimo è unico. Infatti, se u_1 e u_2 fossero minimi distinti dello stesso funzionale I strettamente convesso, risulterebbe

$$I\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{I(u_1) + I(u_2)}{2}$$

e quindi la funzione $\dfrac{u_1 + u_2}{2}$ darebbe al funzionale un valore più basso del suo minimo, che è assurdo.

Riassumiamo quanto finora ottenuto nel seguente

Teorema 1.2 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e convessa nella variabile z. Allora, se esiste una costante $L > 0$ tale che una funzione u_L, che minimizza il funzionale

$$I_\Omega(u) = \int_\Omega f(Du(x))\,dx \tag{1.6}$$

nella classe $Lip_L(\Omega)$, verifica la stima $\|u_L\|_{0,1} < L$, u_L minimizza il funzionale (1.6) nella classe $\mathcal{A}$.

Il problema della minimizzazione di (1.6) nella classe $\mathcal{A}$ si riconduce al problema di una *maggiorazione a priori* per la norma di Lipschitz di u_L. Proveremo quindi che esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni minimo $\bar{u}$ del funzionale (1.6) in $\mathcal{A}$, sono verificate le stime

(i) $\|\bar{u}\|_{0,\bar{\Omega}} \leq c$
(ii) $[\bar{u}] \leq c$

Nella ricerca delle maggiorazioni a priori studiamo un caso particolarmente semplice che fu risolto da Haar e Radò. Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sia una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e strettamente convessa nella variabile z.

In questa situazione rientrano funzionali interessanti come

$$\int_\Omega |Du|^p\,dx \qquad p>1,$$

che, nel caso $p=2$, è l'integrale di Dirichlet e l'integrale dell'area

$$\int_\Omega (1+|Du|^2)^{1/2}\,dx.$$

Dapprima stabiliamo la maggiorazione a priori (i).

LEMMA 1.3 *Siano $u_1, u_2 \in Lip(\bar\Omega)$ funzioni che minimizzano, ciascuna con il suo dato al bordo, il funzionale (1.6). Allora*

$$u_1 \le u_2 \quad su \quad \partial\Omega \Longrightarrow u_1 \le u_2 \quad in \quad \Omega.$$

DIM. Supponiamo, per assurdo, che l'insieme $\omega = \{x \in \Omega : \ u_1(x) > u_2(x)\}$ sia diverso dal vuoto. Osserviamo che, se $x_0 \in \omega$, esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in ω perché la funzione $u_1 - u_2$ è continua. Poniamo

$$w^+(x) = \max_{x\in\bar\Omega}\{u_1(x), u_2(x)\}$$

e

$$w^-(x) = \min_{x\in\bar\Omega}\{u_1(x), u_2(x)\}.$$

Evidentemente $w^-(x)$ e $w^+(x)$ sono ancora Lipschitziane in $\bar\Omega$ e su $\partial\Omega$ risulta che $w^+ = u_2$ e $w^- = u_1$. Dall'ipotesi che u_1 e u_2 sono minimi, ciascuna con il suo dato al bordo si ha

$$I_\Omega(u_2) \le I_\Omega(w^+) = I_\omega(u_1) + I_{\Omega-\omega}(u_2) \Longrightarrow I_\omega(u_2) \le I_\omega(u_1)$$

ed anche

$$I_\Omega(u_1) \le I_\Omega(w^-) = I_\omega(u_2) + I_{\Omega-\omega}(u_1) \Longrightarrow I_\omega(u_1) \le I_\omega(u_2)$$

da cui segue

$$I_\omega(u_1) = I_\omega(u_2). \tag{1.7}$$

D'altra parte u_1 e u_2 minimizzano il funzionale I_ω nella classe $\{v \in Lip(\bar\omega) : \ v = u_1 = u_2 \quad \text{su} \quad \partial\omega\}$.

Infatti se, per assurdo, u_1 non minimizza I_ω nella classe suddetta, esiste $v \in Lip(\bar{\omega})$ tale che, $v = u_1$ su $\partial\omega$ e $I_\omega(v) < I_\omega(u_1)$. Allora la funzione definita da

$$w = \begin{cases} v & \text{in} \quad \omega \\ u_1 & \text{in} \quad \Omega - \omega \end{cases}$$

appartiene allo spazio $Lip(\bar{\Omega})$, verifica la condizione $w = u_1$ sul bordo di Ω e $I_\Omega(w) < I_\Omega(u_1)$, contro l'ipotesi che u_1 minimizza con il suo dato al bordo. Analogamente si ragiona se u_2 non minimizza I_ω.

Poichè I_ω è strettamente convesso, deve essere $u_1 = u_2$ in ω e questo contraddice la definizione di ω stesso.

LEMMA 1.4 *Siano $u_1, u_2 \in Lip(\bar{\Omega})$ funzioni che minimizzano, ciascuna con il suo dato al bordo, il funzionale (1.6). Allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| = \max_{\partial\Omega} |u_1 - u_2|.$$

DIM. Sia $M = \max_{\partial\Omega} |u_1 - u_2|$. La funzione $u_2 + M$ minimizza I_Ω nella classe $\{v \in Lip(\bar{\Omega}) : \ v = u_2 + M \quad \text{su} \quad \partial\Omega\}$ e $u_1 \le u_2 + M$ su $\partial\Omega$. Dal lemma 1.3 segue che $u_1 \le u_2 + M$ in $\bar{\Omega}$. In modo analogo si prova che $u_2 \le u_1 + M$ in $\bar{\Omega}$. e quindi la tesi.

LEMMA 1.5 *Sia u una funzione che minimizza il funzionale (1.6) nella classe $\{v \in Lip(\bar{\Omega}) : \ v(x) = u(x) \ \forall x \in \partial\Omega\}$. Allora*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

DIM. Innanzitutto proviamo che le funzioni affini sono di minimo con il loro dato al bordo. Sia π una funzione affine e sia $v \in Lip(\bar{\Omega})$ tale che $v = \pi$ su $\partial\Omega$. Allora

$$\begin{aligned} I_\Omega(\pi) - I_\Omega(v) &= \int_\Omega [f(D\pi(x)) - f(Dv(x))]\, dx \\ &\le \sum_i \int_\Omega f_{z_i}(D\pi) D_i(\pi - v)\, dx = \sum_i f_{z_i}(D\pi) \int_\Omega D_i(\pi - v)\, dx = 0. \end{aligned}$$

la tesi è ora ovvia conseguenza del lemma 1.4 quando si ponga $u_1 = u$ e $u_2 = 0$. Dal precedente lemma segue che, se u è una soluzione del problema (1.2), risulta

$$\|u\|_{0,\bar{\Omega}} = \|\varphi\|_{0,\partial\Omega}.$$

Quindi basta scegliere $c \geq \|\varphi\|_{0,\partial\Omega}$ per ottenere la (i) cioè la prima stima a priori. Resta da provare la (ii). Allo scopo proviamo il seguente risultato dovuto a Radò.

Teorema 1.6 *Se esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni soluzione del problema di minimo (1.2), risulta*

$$|u(x) - u(x_0)| \leq c|x - x_0| \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, \, \forall x_0 \in \partial\Omega,$$

allora risulta pure

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y| \qquad \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

Dim. Siano $x, y \in \Omega$. Posto $\tau = y - x$, indichiamo con Ω_τ l'insieme definito da

$$\Omega_\tau := \{z \in \mathbb{R}^n : \ z - \tau \in \Omega\}$$

e, se $g(x)$ è una funzione su Ω, indichiamo con g_τ la funzione definita per $z \in \Omega_\tau$ da $g_\tau(z) = g(z - \tau)$. È chiaro che u e u_τ minimizzano in $\Omega \cap \Omega_\tau$ il funzionale (1.6) tra le funzioni lipschitziane in $\overline{\Omega \cap \Omega_\tau}$ che assumono sul bordo di $\Omega \cap \Omega_\tau$ il loro rispettivo valore. Applicando il lemma 1.4 all'insieme $\Omega \cap \Omega_\tau$ si conclude che esiste $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ tale che

$$|u(y) - u_\tau(y)| \leq |u(z) - u_\tau(z)|. \tag{1.8}$$

D'altra parte se $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ allora $z \in \partial\Omega$ oppure $z - \tau \in \partial\Omega$ quindi, dall'ipotesi,

$$|u(z) - u(z - \tau)| \leq c|\tau| = c|x - y|. \tag{1.9}$$

Mettendo insieme la (1.8) e la (1.9) troviamo che per ogni $x, y \in \bar{\Omega}$ risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|$$

cioè la tesi.

Dal teorema di Radò lo studio della maggiorazione a priori della costante di Lipschitz di una soluzione del problema di minimo si riduce a stabilirne la validità al bordo. Diamo ora la seguente definizione.

Definizione 1.1 *Diremo che una funzione $\varphi(x)$ definita su $\partial\Omega$ verifica una condizione di pendenza limitata (B.S.C. dall'inglese: bounded slope condition) con costante c se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esistono due funzioni affini*

$$\pi^{\pm}(x_0, x) = \langle \alpha^{\pm}(x_0), x - x_0 \rangle + \varphi(x_0)$$

tali che i vettori costanti $\alpha^{\pm}(x_0)$ dipendono solo da x_0, $|\alpha^{\pm}(x_0)| \leq c$ e per ogni $x \in \partial\Omega$ risulta $\pi^-(x_0, x) \leq \varphi(x) \leq \pi^+(x_0, x)$.

Osservazione Osserviamo che, affinché la precedente definizione abbia senso, quando non siamo nel caso particolare in cui la φ sia la restrizione a $\partial\Omega$ di una funzione affine, occorre che l'insieme Ω sia convesso. Infatti se le due funzioni affini $\pi^{\pm}$ non coincidono fra loro, risulta

$$\langle \alpha^+(x_0) - \alpha^-(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Poichè le funzioni affini sono di minimo per il funzionale (1.6) con il loro dato al bordo, applicando il lemma 1.3, si ha

$$\langle \alpha^+(x_0) - \alpha^-(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Da questo si deduce che, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un iperpiano $\mathcal{H}$, non identicamente nullo, di equazione $\langle \alpha^+(x_0) - \alpha^-(x_0), x - x_0 \rangle = 0$, rispetto al quale Ω resta tutto in uno dei due semispazi individuati da $\mathcal{H}$.

D'altra parte la convessità di Ω non è sufficiente a garantire la B.S.C. come si vede se $\partial\Omega$ ha una parte piatta Σ e φ non è affine su Σ. Per provare ciò proviamo che, se φ soddisfa la B.S.C. e $\partial\Omega$ ha una parte piatta Σ, φ è necessariamente affine. Infatti, presi due punti $x, y \in \Sigma$ e un punto $z = \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in (0,1)$ che appartiene ancora a Σ, dall'ipotesi che φ verifica la B.S.C. (definizione 1.1), si ha

$$\langle \alpha^-(z), x - z \rangle \leq \varphi(x) - \varphi(z) \leq \langle \alpha^+(z), x - z \rangle$$

e pure

$$\langle \alpha^-(z), y - z \rangle \leq \varphi(y) - \varphi(z) \leq \langle \alpha^+(z), y - z \rangle.$$

Sostituendo, dove serve, a z il suo valore in termini di x e y si ha

$$(1-\lambda)\langle \alpha^-(z), x - y \rangle \leq \varphi(x) - \varphi(z) \leq (1-\lambda)\langle \alpha^+(z), x - y \rangle$$

e pure

$$\lambda\langle \alpha^-(z), y - x \rangle \leq \varphi(y) - \varphi(z) \leq \lambda\langle \alpha^+(z), y - x \rangle.$$

Dividendo per $1-\lambda$ nella penultima espressione e per λ nell'ultima e sommando quanto ottenuto, si trova

$$\langle \alpha^-(z), 0 \rangle \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{1-\lambda} + \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{\lambda} \leq \langle \alpha^+(z), 0 \rangle$$

che comporta

$$\lambda(\varphi(x) - \varphi(z)) + (1-\lambda)(\varphi(y) - \varphi(z)) = 0$$

e quindi

$$\varphi(z) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Si è dunque provato che φ deve essere necessariamente affine.

TEOREMA 1.7 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato convesso e sia φ una funzione su $\partial\Omega$ che verifica una B.S.C. con costante c. Per ogni soluzione u del problema di minimo (1.2) vale la stima*

$$|u(x) - u(x_0)| \le c|x - x_0| \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

DIM. Per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ siano $\pi^{\pm}(x_0, x)$ le funzioni introdotte nella definizione 1.1. Poichè sono affini, ciascuna di esse è di minimo per il funzionale (1.6) tra le funzioni che assumono il suo valore al bordo. Sia u soluzione di (1.2) quindi $u \equiv \varphi$ su $\partial\Omega$. Dalla definizione 1.1 risulta

$$\pi^-(x_0, x) \le \varphi(x) = u(x) \le \pi^+(x_0, x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Dal lemma 1.3 segue che

$$\pi^-(x_0, x) \le u(x) \le \pi^+(x_0, x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Quindi per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ risulta

$$\langle \alpha^-(x_0), x - x_0 \rangle + u(x_0) \le u(x) \le \langle \alpha^+(x_0), x - x_0 \rangle + u(x_0)$$

da cui

$$|u(x) - u(x_0)| \le c|x - x_0|$$

che è la tesi. Finora abbiamo completamente provato il seguente teorema

TEOREMA 1.8 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato convesso e sia $\varphi \in Lip(\bar{\Omega})$ una funzione che verifica la B.S.C. con costante c. Allora il problema*

$$\min\left\{ I(u) = \int_\Omega f(Du(x))dx : u \in Lip(\bar{\Omega}), u(x) = \varphi(x)\ \forall x \in \partial\Omega \right\}$$

con $f(z)$ funzione di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e strettamente convessa, ha uno ed un solo punto di minimo $\bar{u}$ che verifica la condizione

$$\|\bar{u}\|_{0,1} \le c,$$

essendo c indipendente da $\bar{u}$.

Osservazione Se si suppone che f è solo convessa, ma non strettamente convessa, nel precedente teorema viene meno l'unicità della soluzione ma non l'esistenza. Infatti, se si considera il funzionale perturbato

$$I_\epsilon(u) = \int_\Omega [f(Du(x)) + \epsilon|Du|^2]dx$$

per $\epsilon > 0$ la funzione integranda è strettamente convessa e quindi, il relativo problema perturbato, per ogni $\epsilon > 0$, ammette un' unica soluzione $u_\epsilon \in Lip(\bar{\Omega})$ tale che $\|u_\epsilon\|_{0,1} \leq c$, dove c è indipendente da ϵ. Allora dalla successione delle u_ϵ, per il teorema di Ascoli-Arzelà, possiamo estrarre una successione uniformemente convergente ad una $u \in Lip(\bar{\Omega})$ che è soluzione del problema originale, dove la funzione integranda è convessa ma non strettamente convessa.

Osservazione Il legame tra la regolarità del dato al bordo e il fatto che verifichi una condizione di pendenza limitata (B.S.C.) è stato oggetto di studio di vari autori. I due teoremi seguenti, che ci limitiamo ad enunciare, sono dovuti rispettivamente ad Hartman e ad Hartman-Miranda.

Ricordiamo che si dice che $\partial\Omega$ è di classe $\mathcal{C}^1$ (rispettivamente $\mathcal{C}^{1,\alpha}$) se, localmente, essa è grafico di una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ (rispettivamente $\mathcal{C}^{1,\alpha}$)

Teorema 1.9 *Sia Ω un aperto, limitato e convesso e sia φ una funzione verificante una B.S.C. Allora, se $\partial\Omega$ è di classe $\mathcal{C}^1$ (rispettivamente $\mathcal{C}^{1,\alpha}$), risulta che $\varphi \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ (rispettivamente $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\partial\Omega)$).*

Per introdurre il teorema successivo abbiamo bisogno della seguente definizione.

Definizione 1.2 *Diremo che Ω è uniformemente convesso se esiste una costante positiva c tale che, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, esiste un iperpiano $\mathcal{H}$ passante per x_0 e tale che $dist(x, \mathcal{H}) \geq c\|x - x_0\|^2$ per ogni $x \in \partial\Omega$.*

Teorema 1.10 *Sia Ω un aperto, limitato , uniformemente convesso con frontiera di classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione φ, definita su $\partial\Omega$, verifichi una B.S.C., è che $\varphi \in \mathcal{C}^{1,1}(\partial\Omega)$.*

§2 Esempio di Bernstein.

Siano $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ e

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x^2 + y^2 = 4 \\ m \in \mathbb{R}_+ & \text{se} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Consideriamo il problema di minimo relativo al funzionale dell'area:

$$\min \left\{ I(u) = \int_\Omega (1 + |Du(x, y)|^2)^{1/2} dxdy : u \in Lip(\bar{\Omega}), u \equiv \varphi \text{ su } \partial\Omega \right\}.$$

Per la stretta convessità del funzionale dell'area e per la simmetria del dominio Ω e del dato al bordo φ, l'unico minimo, se esiste, deve essere una funzione $u(x,y)$ che dipende solo da $|(x,y)| = r$ e quindi $u(x,y) = v(r) = v[(x^2+y^2)^{1/2}]$, con $v : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione lipschitziana tale che $v(1) = m,\ v(2) = 0$.

Infatti, passando a coordinate polari, si ha

$$(2.1) \quad I(u) = \int_\Omega (1 + |Du(x,y)|^2)^{1/2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r(1 + {u_r}^2 + {u_\theta}^2/r^2)^{1/2} dr$$

dove con u_r e u_θ abbiamo denotato le derivate di u fatte rispetto a r e a θ.

Se ora denotiamo con $\bar{u}$ la media della funzione u sulla circonferenza di raggio r, cioè

$$\bar{u}(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) d\theta,$$

possiamo dimostrare che

$$(2.2) \qquad I(\bar{u}) \leq I(u),$$

da cui si conclude che il minimo va ricercato fra le funzioni radiali. Per dimostrare la (2.2), osserviamo che, esplicitamente, si scrive nella forma

$$2\pi \int_1^2 rdr \left(1 + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_r d\theta\right]^2\right)^{1/2} \leq \int_1^2 rdr \int_0^{2\pi} (1 + {u_r}^2 + {u_\theta}^2/r^2)^{1/2} d\theta$$

da cui è chiaro che essa si ottiene moltiplicando per r e integrando la seguente disuguaglianza:

$$\left(1 + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_r\, d\theta\right]^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + {u_r}^2)^{1/2}\, d\theta$$

che non è altro che la disuguaglianza di Jensen per la funzione convessa $f(z) = (1+|z|^2)^{1/2}$. Una volta che abbiamo provato che il minimo, se esiste, è una funzione radiale v, poichè $v_\theta = 0$, possiamo scrivere da (2.1)

$$I(v) = 2\pi \int_1^2 [1 + (v')^2]^{1/2} rdr$$

da cui l'equazione di Eulero per v

$$\frac{d}{dr} \frac{rv'}{[1 + (v')^2]^{1/2}} = 0.$$

Per integrazione, con k costante reale otteniamo che

$$rv' = k[1 + (v')^2]^{1/2}$$

da cui

$$(r^2 - k^2)(v')^2 = k^2 \tag{2.3}$$

Osserviamo subito che questa relazione pone un vincolo su k perché deve essere $(r^2 - k^2) \geq 0$ e $1 \leq r \leq 2$, quindi deve essere $k^2 \leq 1$. Inoltre, ricavando v', si ottiene

$$v' = \pm \frac{|k|}{(r^2 - k^2)^{1/2}}.$$

Se v fosse non decrescente da qualche parte, si potrebbe modificare ottenendo una funzione su cui il funzionale avrebbe valore minore. Quindi, nella precedente relazione, scegliamo il segno in modo da avere che v decresce e, integrando ancora una volta, otteniamo

$$v(r) = |k| \log \frac{c}{r + (r^2 - k^2)^{1/2}}$$

con c costante reale. Imponendo la condizione $v(2) = 0$ si ha $c = 2 + (4 - k^2)^{1/2}$ per cui k si ricava dalla condizione $v(1) = m$, quindi

$$|k| \log \frac{2 + (4 - k^2)^{1/2}}{1 + (1 - k^2)^{1/2}} = m = m(k). \tag{2.4}$$

Studiando la funzione $m(k)$ definita in (2.4), dovendo essere $|k| \leq 1$, si vede che esiste un valore massimo m_0 di m tale che per $m > m_0$ il problema non ha soluzione, almeno se formulato in questo modo, perché $v'(r)$ non resta limitata.

Osservazione Osserviamo che nell'esempio di Bernstein, se si considera un punto di $\partial\Omega$ appartenente al cerchio interno della corona circolare, per nessun valore di m si possono trovare i due piani della B.S.C., che pertanto non è mai verificata. Eppure per m abbastanza piccolo la soluzione si trova: dunque la B.S.C. è condizione sufficiente ma non necessaria per avere esistenza del minimo.

Diamo una interpretazione geometrica di questo problema. Consideriamo un piano orizzontale riferito agli assi x, y e su di esso la corona circolare che rappresenta il dominio $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, l'asse z è quello su cui misuriamo i valori delle funzioni. Le funzioni che consideriamo sono, come si è visto, a simmetria radiale quindi prendono valore costante sulle circonferenze di centro l'origine e raggio compreso fra 1 e 2. Di fatto sono superfici di rotazione con asse di simmetria l'asse z. Per la condizione al bordo assegnata, le superfici devono avere valore zero sulla circonferenza esterna di Ω e valore m sulla circonferenza interna di Ω.

Ne consegue, dall'analisi fatta, che le superfici di area minima, se $m \leq m_0$, sono lipschitziane e il problema che abbiamo posto ha soluzione. Se $m > m_0$ la superficie di area minima si trova ambientando il problema in uno spazio più ampio, lo spazio delle funzioni $BV(\Omega)$ a variazione limitata su Ω e si vede che ha per grafico la soluzione corrispondente al valore limite m_0 più la porzione del cilindro verticale che ha come base la circonferenza interna di raggio $r = 1$ ed è compresa fra i livelli m_0 ed m. Noi non ci occuperemo di questo ma segnaliamo che, dal lavoro di Bernstein, questo problema è stato affrontato da autorevoli studiosi e sono stati ottenuti risultati molto raffinati.

§3 Tecnica delle barriere.

In questo paragrafo mostreremo come sia possibile ottenere una maggiorazione a priori del gradiente di una soluzione del problema di minimo usando una diversa tecnica: la tecnica delle barriere.

Allo scopo introduciamo la seguente definizione.

Definizione 3.1 *Dato il funzionale*

$$I(u) = \int_\Omega f(Du(x))\,dx, \tag{3.1}$$

diremo che una funzione $w \in Lip(\bar\Omega)$ è una soprasoluzione (risp. una sottosoluzione) se, per ogni funzione $v \in Lip(\bar\Omega)$ che verifichi $v \geq w$ (risp. $v \leq w$) e $supp(v-w) \subset \Omega$ (risp.$supp(w-v) \subset \Omega$) , risulta

$$I(w) \leq I(v).$$

Le ipotesi che faremo su f sono le stesse che nel paragrafo precedente. Inoltre, con argomentazioni analoghe a quelle utilizzate nella dimostrazione del lemma 1.3, si dimostrano i seguenti risultati.

Lemma 3.1 *Supponiamo che u_R minimizzi il funzionale (3.1) nella classe $\mathcal{A} := \{u \in Lip_R(\Omega) : u \equiv \varphi$ su $\partial\Omega\}$. Inoltre $w \in Lip(\bar\Omega)$ sia una soprasoluzione tale che $w \geq \varphi$ su $\partial\Omega$. Allora $w \geq u_R$ in $\bar\Omega$.*

Lemma 3.2 *Supponiamo che u_R minimizzi il funzionale (3.1) nella classe $\mathcal{A} := \{u \in Lip_R(\Omega) : u \equiv \varphi$ su $\partial\Omega\}$. Inoltre $v \in Lip_R$ sia una sottosoluzione tale che $v \leq \varphi$ su $\partial\Omega$. Allora $v \leq u_R$ in $\bar\Omega$.*

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 3.3 *Supponiamo che* w *e* v *siano rispettivamente una soprasoluzione e una sottosoluzione per (3.1) e che*

$$w \equiv v \equiv \varphi \qquad su\ \partial\Omega.$$

Sia $R > R_1 = \max([v], [w])$ *e sia* u_R *di minimo in* $\mathcal{A}$. *Allora*

$$[u_R] < R.$$

DIM. Dapprima valutiamo la quantità $|u_R(x) - u_R(y)|$ con $x, y \in \bar{\Omega}$. Per il teorema di Radò è sufficiente far variare y su $\partial\Omega$. Dai lemmi 3.1 e 3.2 segue che

$$v(x) \leq u_R(x) \leq w(x) \quad \forall x \in \Omega$$

e, poichè per $y \in \partial\Omega$ risulta

$$v(y) = u_R(y) = w(y),$$

si ha

$$v(x) - v(y) \leq u_R(x) - u_R(y) \leq w(x) - w(y)$$

da cui

$$|u_R(x) - u_R(y)| \leq R_1|x - y|$$

che conclude la dimostrazione.

Questo teorema fornisce la richiesta stima a priori della costante di Lipschitz della u_R non appena si conoscano una soprasoluzione e una sottosoluzione che assumono su $\partial\Omega$ il valore assegnato φ. Quindi vedremo come si possono costruire soprasoluzioni e sottosoluzioni che assumono un valore fissato al bordo con la tecnica delle barriere. Sia $\epsilon > 0$ e sia $d(x)$ la distanza di x dalla frontiera $\partial\Omega$ di Ω. Poniamo

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : d(x) < \epsilon\}$$

$$\Gamma_\epsilon := \{x \in \Omega : d(x) = \epsilon\}$$

Se la frontiera $\partial\Omega$ di Ω è di classe $\mathcal{C}^3$ sono vere le seguenti affermazioni che non dimostriamo:

(j) Esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega_{\epsilon_0}$ esiste uno ed un solo $y \in \partial\Omega$: $d(x) = |x - y|$.

(jj) La funzione distanza $d(x)$ è di classe $\mathcal{C}^2$ in Ω_{ϵ_0} e $|Dd(x)| = 1$.

(jjj) Se $x \in \Omega_\epsilon$ con $0 < \epsilon < \epsilon_0$, si ha

$$(n-1)\Lambda(x) = -\Delta d(x) \geq (n-1)\Lambda(y)$$

dove $y \in \partial\Omega$ è il punto di minima distanza da x, $\Lambda(y)$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ in y e $\Lambda(x)$ è la curvatura media in x della curva Γ_t passante per x.

Consideriamo il problema

$$(\mathcal{P}) \qquad \min\left\{\int_\Omega f(Du(x)\,dx : \quad u(x)=\varphi(x) \ \ \forall x\in\partial\Omega\right\}.$$

Definizione 3.2 *Si chiama barriera superiore per il problema* $(\mathcal{P})$ *una funzione* $\mu(x)$ *definita in qualche* $\bar{\Omega}_\epsilon, 0<\epsilon<\epsilon_0$, *tale che*

(i) $\mu(x)\in\mathcal{C}^2(\Omega_\epsilon)\cap Lip(\bar{\Omega}_\epsilon)$.
(ii) $\mu(x)\equiv\varphi$ *su* $\partial\Omega$ *e* $\mu(x)\ge 1+\max_{\partial\Omega}|\varphi|$ *su* Γ_ϵ.
(iii) $\mathcal{E}(\mu)=\sum_{i=1}^n D_i f_{z_i}(D\mu)\le 0$ *in* Ω_ϵ.

Definizione 3.3 *Si chiama barriera inferiore per il problema* $(\mathcal{P})$ *una funzione* $\lambda(x)$ *definita in qualche* $\bar{\Omega}_\epsilon, 0<\epsilon<\epsilon_0$, *tale che*

(i) $\lambda(x)\in\mathcal{C}^2(\Omega_\epsilon)\cap Lip(\bar{\Omega}_\epsilon)$.
(ii) $\lambda(x)\equiv\varphi$ *su* $\partial\Omega$ *e* $\lambda(x)\le -1-\max_{\partial\Omega}|\varphi|$ *su* Γ_ϵ.
(iii) $\mathcal{E}(\lambda)=\sum_{i=1}^n D_i f_{z_i}(D\lambda)\ge 0$ *in* Ω_ϵ.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe $\mathcal{C}^3$, sia $\varphi(x)\in\mathcal{C}^2(\partial\Omega)$ e sia $f=f(z)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo che non abbiamo fatto alcuna ipotesi di convessità su Ω. È possibile costruire barriere per il problema di minimo nei casi seguenti.

Caso A. f=f(z) è una funzione convessa tale che

$$\alpha(z)|\xi|^2\le\sum_{i,j} f_{z_i,z_j}(z)\xi_i\xi_j\le\beta(z)|\xi|^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n$$

dove $\alpha(z)>0$ e $\beta(z)$ verificano la relazione

$$\limsup_{|z|\longrightarrow+\infty}\frac{\beta(z)}{|z|\alpha(z)}<+\infty. \tag{3.2}$$

In questo caso rientrano le funzioni $f(z)=|z|^p,\ p>1$. Infatti

$$f_{z_i,z_j}(z)=p|z|^{p-2}\{\delta_{i,j}+(p-2)|z|^{-2}z_iz_j\}$$

per cui il minimo e il massimo autovalore sono dati da

$$\alpha(z)=p|z|^{p-2},\quad \beta(z)=p(p-1)|z|^{p-2}$$

e la (3.2) è ovviamente verificata.

Non rientrano in questo caso funzioni del tipo $f(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}}$ perché risulta

$$f_{z_i,z_j}(z) = (\delta_{i,j} + z_i, z_j)\, e^{\frac{|z|^2}{2}}$$

per cui il minimo e il massimo autovalore sono dati da

$$\alpha(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}}, \quad \beta(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}}(1 + |z|^2)$$

e, come si vede facilmente, la (3.2) non è verificata.

Caso B. La funzione $f(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}$ e la frontiera $\partial\Omega$ di Ω ha curvatura media non negativa. Questa funzione non rientra nel caso A. Infatti

$$f_{z_i,z_j}(z) = [(1 + |z|^2)\delta_{i,j} - z_i, z_j](1 + |z|^2)^{-3/2}$$

per cui il minimo e il massimo autovalore sono dati da

$$\alpha(z) = (1 + |z|^2)^{-3/2}, \quad \beta(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$$

quindi la (3.2) non è verificata.

Ci limiteremo a costruire una barriera superiore, la barriera inferiore si può costruire con lo stesso procedimento. Dapprima estendiamo φ ad una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\bar{\Omega}$, essendo questo possibile per un teorema di Withney e denotiamo ancora con φ il suo prolungamento. Cerchiamo una barriera del tipo

$$\mu(x) = \varphi(x) + g(d(x))$$

dove $d(x)$ è la funzione distanza e, riferendoci al numero ϵ_0 introdotto nella (j), $g = g(s)$ definita su $[0, \epsilon]$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ tale che

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} g(0) = 0,\ g(\epsilon) \geq 1 + 2\max_{\bar{\Omega}} |\varphi(x)| \equiv F_1, \\ g'(s) \geq 1 + [\varphi] \equiv F_2,\ g''(s) < 0 \quad \forall s \in [0, \epsilon]. \end{cases}$$

Si vede facilmente che la funzione μ così definita verifica le (i) e (ii) della definizione 3.2. Per quanto riguarda la dimostrazione della (iii) bisogna distinguere i due casi A e B.

Nel caso A risulta

$$\mathcal{E}(\mu) = f_{z_i,z_j}(D\mu)D_{ij}\mu = f_{z_i,z_j}(D\mu)[g'' D_i d D_j d + g' D_{ij} d + D_{ij}\varphi]$$

e, ricordando che $g'' < 0$ e tenendo conto della definizione di minimo e di massimo autovalore, si ha

$$\mathcal{E}(\mu) \leq g''\alpha(D\mu) + c_1\beta(D\mu)[1 + g'].$$

Mettendo insieme questa con le relazioni

$$\beta(D\mu) \le c_2 \alpha(D\mu)|D\mu|, \quad |D\mu| \le c_3(1+g'),$$

la prima delle quali segue dalla (3.2), troviamo

$$\mathcal{E}(\mu) \le \alpha(D\mu)[g'' + c_4(1+g')^2].$$

E ancora, poichè dalla (3.3) $g' \ge 1$,

$$\mathcal{E}(\mu) \le \alpha(D\mu)[g'' + c{g'}^2]$$

dove c è una costante positiva che dipende dalle norme $\mathcal{C}^2$ di φ e d. Se ora scegliamo $g(s) = \frac{1}{a}\log(bs+1), \ s \in [0,\epsilon]$ con $a \ge c$ si ottiene $\mathcal{E}(\mu) \le 0$ in Ω_ϵ. Perché la funzione g così definita verifichi tutte le condizioni richieste nella (3.3) basterà prendere

$$a = c_1, \quad b = \max\left\{c_1\, F_2\, e^{c_1 F_1}; \frac{e^{c_1 F_1}-1}{\epsilon_0}\right\}; \quad \epsilon = \frac{e^{c_1 F_1}-1}{b} \le \epsilon_0.$$

Nel caso B risulta

$$\begin{aligned}(1+|D\mu|^2)^{3/2}\mathcal{E}(\mu) = g''\left[1+|D\varphi|^2 - |\langle D\varphi, Dd\rangle|^2\right] + (1+|D\varphi|^2)^{3/2}\mathcal{E}(\varphi) \\ + {g'}^3\Delta d + {g'}^2\left[\Delta\varphi - D_{ij}\varphi D_i d D_j d + 2\Delta d\langle D\varphi, Dd\rangle\right] \\ + g'\left[2\Delta\varphi\langle D\varphi, Dd\rangle - 2D_{ij}\varphi D_i\varphi D_j d + (1+|D\varphi|^2)\Delta d - D_{ij} d D_i\varphi D_j\varphi\right].\end{aligned}$$

Per l'ipotesi che la curvatura media di $\partial\Omega$ sia non negativa risulta $\Delta d \le 0$ in Ω_ϵ e quindi ${g'}^3\Delta d \le 0$ perché $g' \ge 0$. Utilizzando pure le altre proprietà di g espresse nella (3.3) la somma al secondo membro si maggiora, come nel caso A, con $g'' + cg'$.

Vediamo ora come, a partire dalle barriere, si possano ricavare sottosoluzioni e soprasoluzioni per il nostro problema variazionale $(\mathcal{P})$.

LEMMA 3.4 *Ogni barriera superiore $\mu(x)$ definita in $\bar\Omega_\epsilon$ è una soprasoluzione in Ω_ϵ per il problema $(\mathcal{P})$.*

DIM. Bisogna provare che

$$I_{\Omega_\epsilon}(\mu) \le I_{\Omega_\epsilon}(v)$$

per ogni funzione $v \in Lip(\bar\Omega_\epsilon)$ che verifichi $v = \varphi$ su $\partial\Omega$, $v \ge \mu$ e $supp(v-\mu) \subset \Omega_\epsilon$. Oppure, equivalentemente, che per $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_\epsilon)$ tale che $\eta \ge 0$ in Ω_ϵ

$$I_{\Omega_\epsilon}(\mu) \le I_{\Omega_\epsilon}(\mu+\eta)$$

.

Consideriamo la funzione $\alpha : t \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow R$ definita da

$$\alpha(t) := I_{\Omega_\epsilon}(\mu + t\eta) = \int_{\Omega_\epsilon} f(D\mu + tD\eta)\, dx.$$

Si ha

$$\alpha'(0) = \int_{\Omega_\epsilon} f_{z_i}(D\mu) D_i\eta\, dx = -\int_{\Omega_\epsilon} D_i f_{z_i}(D\mu)\eta\, dx$$

e, poichè $\eta \geq 0$ e $\mathcal{E}(\mu) = D_i f_{z_i}(D\mu) \leq 0$, risulta $\alpha'(0) \geq 0$. Ricordando che $\alpha(t)$ è convessa, si ha pure $\alpha(0) \leq \alpha(1)$, da cui l'asserto.

Teorema 3.5 *La funzione $w(x)$ definita da*

$$w(x) = \begin{cases} \min\{\mu(x), \|\varphi\|\} & \textit{in} \quad \bar{\Omega}_\epsilon \\ \|\varphi\| \quad \textit{in} \quad \Omega - \bar{\Omega}_\epsilon \end{cases}$$

dove $\|\varphi\| = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$, *è una soprasoluzione di* $(\mathcal{P})$ *in* Ω.

Dim. Sia $v \in Lip(\bar{\Omega})$ tale che $v \geq w$ in Ω e $supp(v - w) \subset \Omega$. Dobbiamo dimostrare che $I_\Omega(w) \leq I_\Omega(v)$. Denotiamo con $v \wedge \|\varphi\|(x)$ la funzione $\min\{v(x), \|\varphi\|\}$ e poniamo $E = \{x \in \Omega : v(x) \geq \|\varphi\|\}$. Allora $I_\Omega(v \wedge \|\varphi\|) = I_E(\|\varphi\|) + I_{\Omega - E}(v)$. D'altra parte la funzione identicamente uguale a $\|\varphi\|$ in Ω è soluzione del problema

$$\min\{I_E(u) : \quad u(x) = \|\varphi\| \; \forall x \in \partial E\}$$

e quindi, poichè $v = \|\varphi\|$ su ∂E, $I_E(\|\varphi\|) \leq I_E(v)$ da cui segue

$$I_\Omega(v \wedge \|\varphi\|) \leq I_E(v) + I_{\Omega - E}(v) = I_\Omega(v). \tag{3.4}$$

Se dimostriamo che

$$I_\Omega(w) \leq I_\Omega(v \wedge \|\varphi\|) \tag{3.5}$$

la tesi seguirà da (3.4) e (3.5). Per provare la (3.5) osserviamo dapprima che $v \geq w$ in Ω e dunque in $\Omega - \Omega_\epsilon$, inoltre $w = \|\varphi\|$ in $\Omega - \Omega_\epsilon$ e quindi $v \wedge \|\varphi\| = \|\varphi\| = w$ in $\Omega - \Omega_\epsilon$. Basterà dimostrare la (3.5) in Ω_ϵ.

Dalla definizione di w si ha $w = \min\{\mu, \|\varphi\|\}$ in Ω_ϵ; d'altra parte si ha pure $v \geq w$ e quindi

$$v \wedge \|\varphi\| \geq w \wedge \|\varphi\| = w.$$

Inoltre $supp(v \wedge \|\varphi\| - w) \subset \Omega_\epsilon$. Utilizzando il lemma 3.4 otteniamo:

$$I_{\Omega_\epsilon}(\mu) \leq I_{\Omega_\epsilon}(\mu + v \wedge \|\varphi\| - w). \tag{3.6}$$

Poniamo ora $E_1 = \{x \in \Omega_\epsilon : \ \mu(x) \leq \|\varphi\|\}$ e $E_2 = \Omega_\epsilon - E_1$. Si ha $\mu = w$ in E_1 mentre in E_2 risulta $v \wedge \|\varphi\| = \|\varphi\|$ perché

$$v \geq w \Rightarrow v \wedge \|\varphi\| \geq w \wedge \|\varphi\|$$

da cui, dove $w \wedge \|\varphi\| = \|\varphi\|$, si ha $v \wedge \|\varphi\| \geq \|\varphi\|$ e quindi $v \wedge \|\varphi\| = \|\varphi\|$. Dalla (3.6) si ha

$$I_{E_1}(w) \leq I_{E_1}(v \wedge \|\varphi\|)$$

$$I_{E_2}(w) = I_{E_2}(v \wedge \|\varphi\|)$$

da cui, sommando

$$I_{\Omega_\epsilon}(w) \leq I_{\Omega_\epsilon}(v \wedge \|\varphi\|)$$

che conclude la dimostrazione.

LEMMA 3.6 *Ogni barriera inferiore $\lambda(x)$ definita in $\bar{\Omega}_\epsilon$ è una sottosoluzione in Ω_ϵ per il problema $(\mathcal{P})$.*

TEOREMA 3.7 *La funzione $z(x)$ definita da*

$$z(x) = \begin{cases} \max\{\lambda(x), -\|\varphi\|\} & in \quad \bar{\Omega}_\epsilon \\ -\|\varphi\| \quad in \quad \Omega - \bar{\Omega}_\epsilon \end{cases}$$

dove $\|\varphi\| = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$, è una sottosoluzione di $(\mathcal{P})$ in Ω.

Da quanto dimostrato nel corso di questo paragrafo si conclude che valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 3.8 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe $\mathcal{C}^3$ e sia φ di classe $\mathcal{C}^2$. Supponiamo che $f = f(z)$ sia una funzione strettamente convessa tale che*

$$\alpha(z)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} f_{z_i,z_j}(z)\xi_i\xi_j \leq \beta(z)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

dove $\alpha(z) > 0$ e $\beta(z)$ verificano la relazione

$$\limsup_{|z| \longrightarrow +\infty} \frac{\beta(z)}{|z|\alpha(z)} < +\infty.$$

Allora il problema $(\mathcal{P})$ ammette una ed una sola soluzione nello spazio $Lip(\bar{\Omega})$.

TEOREMA 3.9 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe $\mathcal{C}^3$ con frontiera $\partial\Omega$ a curvatura media non negativa. Allora il problema $(\mathcal{P})$, con $f(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}$ e φ di classe $\mathcal{C}^2$, ammette una ed una sola soluzione nello spazio $Lip(\bar{\Omega})$.*

§4 Estensioni e limiti della tecnica di Radò.

Ci proponiamo di vedere se la tecnica utilizzata nei precedenti paragrafi si possa applicare a funzionali più generali, utilizzando le stesse dimostrazioni per quanto possibile. Innanzitutto non è difficile dimostrare che i lemmi 1.3 e 1.4, meglio noti come *principio di massimo* si estendono con la stessa dimostrazione al caso di funzionali del tipo (1.1) se si suppone che l'integranda $f(x,y,z)$ sia di classe $\mathcal{C}^1$ in (y,z), convessa in y e strettamente convessa in z. Nella dimostrazione del lemma 1.4 si è utilizzato il fatto che, per funzionali del tipo (1.1) con $f = f(z)$, se una funzione u è di minimo, anche $u + cost$ lo è. Ciò è ancora vero per funzionali del tipo

$$I(u) = \int_\Omega f(x, Du)\, dx + \int_\Omega H(x)u(x)\, dx \tag{4.1}$$

Infatti, sia $u \in Lip(\bar\Omega)$ di minimo con il suo dato al bordo per il funzionale (4.1) e sia $v = u + cost$ su $\partial\Omega$. Poichè $v - cost$ coincide con u su $\partial\Omega$, si ha

$$\int_\Omega f(x, Du)\, dx + \int_\Omega H(x)u(x)\, dx \leq \int_\Omega f(x, Dv)\, dx + \int_\Omega H(x)[v(x) - cost]\, dx$$

da cui segue

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f(x, D(u + cost))\, dx + \int_\Omega H(x)(u(x) + cost)\, dx\\ &\leq \int_\Omega f(x, Dv)\, dx + \int_\Omega H(x)v(x)\, dx.\end{aligned}$$

Infine, perché si possa ripetere la dimostrazione del teorema di Radò, occorre che la funzione integranda non dipenda esplicitamente da x. Quindi il funzionale più generale cui è applicabile la tecnica di Radò è del tipo

$$I(u) = \int_\Omega f(Du)\, dx + \int_\Omega Hu(x)\, dx \tag{4.2}$$

dove H è costante in Ω.

Rimangono ancora due punti da chiarire. In primo luogo, la maggiorazione a priori del massimo modulo della soluzione non è più immediata conseguenza del principio di massimo perché, per funzionali del tipo (4.2), non è vero in generale che le funzioni lineari minimizzano con il loro dato al bordo. In secondo luogo bisogna stare attenti alla costruzione delle barriere. Distinguiamo ancora il caso A dal caso B (funzionale dell'area).

Nel caso A la costruzione di barriere procede come visto in precedenza, mentre per quanto riguarda la maggiorazione a priori del massimo modulo della soluzione, bisogna cambiare tecnica ed usare le troncature di De Giorgi e Stampacchia.

Illustriamo brevemente questa nuova tecnica limitandoci ai funzionali quadratici, cioè quelli per i quali $\alpha(z) \equiv \alpha$. Stabiliamo la disuguaglianza

$$\int_\Omega f_{z_i}(Du) D_i u \, dx \geq \alpha \int_\Omega |Du|^2 \, dx \tag{4.3}$$

Osserviamo che non lede la generalità supporre $f(0) = f_{z_i}(0) = 0$. Infatti se $f(0) \neq 0$ si può sostituire $f(Du)$ con $F(Du) = f(Du) - f(0)$ in quanto se u minimizza il funzionale (4.2) minimizza pure l'analogo con F al posto di f. Inoltre, se $f_{z_i}(0) \neq 0$, si sceglie $F(Du) = f(Du) - f_{z_i}(0) D_i u$ e si osserva come prima che, se u minimizza il funzionale (4.2), minimizza pure l'analogo con F al posto di f. Dalle osservazioni appena fatte si ha

$$\begin{aligned} f_{z_i}(Du) D_i u &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\{f_{z_i}(tDu) D_i u\} \, dt + f_{z_i}(0) D_i u \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\{f_{z_i}(tDu) D_i u\} \, dt = \int_0^1 f_{z_i, z_j}(tDu) D_i u D_j u \, dt \geq \alpha |Du|^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

da cui, integrando su Ω si ha la (4.3).

Sia ora u di minimo, quindi soluzione dell'equazione di Eulero:

$$\int_\Omega f_{z_i}(Du) D_i \varphi + H\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in W_0^1(\Omega)$$

e sostituiamo nell'equazione φ con la funzione $\max\{u-k, 0\}$ dove k è una costante tale che $k \geq \max_{\partial\Omega} |u|$. Si ottiene, ponendo $E_k := \{x \in \Omega : u(x) > k\}$,

$$\int_{E_k} f_{z_i}(Du) D_i u \, dx = -\int_{E_k} H(u-k) \, dx$$

Da questa, insieme alla (4.4) integrata su E_k, otteniamo

$$\alpha \int_{E_k} |Du|^2 \, dx \leq -\int_{E_k} H(u-k) \, dx \leq |H| \int_{E_k} (u-k) \, dx. \tag{4.5}$$

Dal teorema di Sobolev, prendendo $2^* = \frac{2n}{n-2}$ se $n > 2$ e 2^* come un intero molto grande se $n = 2$, si ha

$$\alpha \int_{E_k} |Du|^2 \, dx \geq c(n) \alpha \left[\int_{E_k} (u-k)^{2^*} \, dx \right]^{2/2^*}, \tag{4.6}$$

dove $c(n)$ è una costante che dipende solo da n. Dalla disuguaglianza di Hölder si ricava

$$\int_{E_k} (u-k) \, dx \leq \left[\int_{E_k} (u-k)^{2^*} \, dx \right]^{1/2^*} |E_k|^{1-1/2^*} \tag{4.7}$$

dove abbiamo denotato con $|E_k|$ la misura dell'insieme E_k.

Da (4.5),(4.6) e (4.7) troviamo che

$$c(n)\alpha \left[\int_{E_k} (u-k)^{2^*} \, dx \right]^{1/2^*} \leq |H||E_k|^{1-1/2^*} \tag{4.8}$$

Se $h \geq k$ risulta $E_h \subset E_k$, dunque

$$\int_{E_k} (u-k)^{2^*} \, dx \geq \int_{E_h} (u-k)^{2^*} \, dx \geq (h-k)^{2^*} |E_h|$$

e, sostituendo nella (4.8),

$$|E_h|^{1/2^*} \leq \frac{|H||E_k|^{1-1/2^*}}{\alpha \, c(n) \, (h-k)}. \tag{4.9}$$

Utilizziamo ora il seguente lemma di Stampacchia.

LEMMA 4.1 *Sia φ una funzione definita in $[k_0, +\infty)$, non negativa, non crescente e tale che, se $h > k \geq k_0$, si ha*

$$\varphi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^\tau} [\varphi(k)]^s$$

dove c, τ, s sono costanti positive. Allora, se $s > 1$, si ha

$$\varphi(k_0 + d) = 0$$

dove

$$d^\tau = c[\varphi(k_0)]^{s-1} 2^{s\tau/(s-1)}.$$

Poniamo ora $\varphi(t) = |E_t|, s = 2^* - 1, \tau = 2^*$ e $k_0 = \|u\|_{0,\partial\Omega}$. La (4.9) garantisce che sono soddisfatte le ipotesi del lemma di Stampacchia con le posizioni appena fatte, dunque si conclude che

$$\varphi(\|u\|_{0,\partial\Omega} + d) = 0$$

e quindi la misura dell'insieme dove $u > \|u\|_{0,\partial\Omega} + d$ è nulla. Poichè $u \in Lip(\bar{\Omega})$ ne deduciamo che

$$u(x) \leq \|u\|_{0,\partial\Omega} + d \qquad \forall x \in \bar{\Omega}$$

e quindi, dalla definizione di d

$$u(x) \leq c(\alpha)[\|u\|_{0,\partial\Omega} + |H|] \qquad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Per minorare u in $\bar{\Omega}$ si procede in maniera analoga, prendendo nell'equazione di Eulero, come funzione test, la funzione $\min\{u + k, 0\}$ e ponendo $E_k := \{x \in \Omega : u(x) < -k\}$. Applicando di nuovo il lemma di Stampacchia si arriva alla stima

$$u(x) \geq -\|u\|_{0,\partial\Omega} + d \qquad \forall x \in \bar{\Omega}$$

e, in definitiva, resta stabilita la maggiorazione a priori

$$\|u(x)\|_{0,\Omega} \leq c(\alpha)[\|u\|_{0,\partial\Omega} + |H|].$$

Abbiamo quindi ottenuto il teorema seguente

TEOREMA 4.2 *Sia $f = f(z)$ strettamente convessa soddisfacente l'ipotesi del caso A, con $\alpha(z)$ costante e sia $\varphi \in Lip(\partial\Omega)$. Allora il problema di minimo relativo al funzionale (4.2) ammette una ed una sola soluzione $u \in Lip(\bar{\Omega})$.*

Nel caso del funzionale dell'area il problema si complica. Minimizzare (4.2), dove $f = (1 + |z|^2)^{1/2}$, equivale a trovare una superficie con valori al bordo assegnati e curvatura media assegnata. È chiaro che bisogna imporre delle condizioni su H perchè esista una soluzione lipschitziana su $\bar{\Omega}$.

Consideriamo, ad esempio, il seguente problema

$$\min\left\{\int_{B_n} [(1 + |Du(x)|^2)^{1/2} + nu(x)]\, dx : u(x) = 0 \quad \forall x \in S_n\right\}$$

dove B_n è la sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$ e S_n la sua frontiera.

La funzione $u(x) = (1 - |x|^2)^{1/2}$ è soluzione del problema e non appartiene a $Lip(\bar{B}_n)$. Per provare che $u(x) = (1 - |x|^2)^{1/2}$ è soluzione si può considerare il problema in coordinate sferiche equivalente al problema assegnato,

$$\min\left\{\int_0^1 \{[1 + {u_r}^2(r)]^{1/2} - nu(r)\}r^{n-1}\, dr : u(1) = 0\right\}$$

e scrivere l'equazione di Eulero per tale funzionale:

$$\frac{d}{dr} r^{n-1} \frac{u_r}{[1 + {u_r}^2(r)]^{1/2}} = -nr^{n-1}.$$

Integrando fra 0 ed r con $r \leq 1$, si ha

$$r^{n-1} \frac{u_r}{[1 + {u_r}^2(r)]^{1/2}} = -r^n$$

da cui

$$\frac{u_r}{[1+{u_r}^2(r)]^{1/2}} = -r$$

e quindi

$$u_r(r) = \frac{-r}{(1-r^2)^{1/2}}.$$

Integrando ora fra r e 1 e tenendo conto della condizione $u(1)=0$, si trova $u(r) = (1-r^2)^{1/2} = (1-|x|^2)^{1/2}$

Osserviamo che il problema

$$\min\left\{\int_{B_n}[(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx : u(x)=0 \quad \forall x \in S_n\right\}$$

non ha soluzione qualunque sia H costante. Infatti, passando alle coordinate sferiche e ragionando come prima, si ha

$$\frac{u_r}{[1+{u_r}^2(r)]^{1/2}} = \frac{H}{n}\,r$$

ed elevando al quadrato e osservando che il primo membro è minore di uno si ha $\frac{|H|}{n}\,r < 1$, da cui, essendo $r \leq 1$, si vede che l'equazione di Eulero si risolve se $|H| < n$.

In generale, se si considera il problema in Ω, quest'ultima condizione diventa

$$|H||\Omega|^{1/n} < n|B_n|^{1/n} \tag{4.10}$$

Supponiamo ora che $u \in Lip(\bar{\Omega})$ sia un minimo per il funzionale

$$\int_\Omega[(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx.$$

In particolare u è una sottosoluzione, quindi per ogni $v \in Lip(\bar{\Omega}), v \leq u$ e tale che $supp(u-v) \subset \Omega$, risulta

$$\int_\Omega[(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx \leq \int_\Omega[(1+|Dv(x)|^2)^{1/2} + Hv(x)]\,dx.$$

Prendiamo

$$v(x) = \begin{cases} k \quad \text{se} \quad x \in E_k = \{x \in \bar{\Omega} : u(x) > k\} \\ u(x) \quad \text{se} \quad x \in (\Omega - E_k) \end{cases}$$

e sostituiamo nella precedente disuguaglianza. Si ottiene:

$$\int_\Omega [(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx \le \int_{E_k} (1+kH)\,dx$$
$$+ \int_{\Omega - E_k} [(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx$$

da cui

$$\int_{E_k} [(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx \le \int_{E_k} (1+kH)\,dx$$

e ancora

$$\int_{E_k} |Du(x)|\,dx \le \int_{E_k} (1+|Du(x)|^2)^{1/2},dx \le \int_{E_k} [1+|H|(u-k)]\,dx.$$

In definitiva abbiamo ottenuto la seguente stima

$$\int_{E_k} |Du(x)|\,dx \le |E_k| + |H| \int_{E_k} (u-k)\,dx. \tag{4.11}$$

Osserviamo che $u-k \in W_0^{1,1}(E_k)$ e quindi per il teorema di Sobolev

$$\left(\int_{E_k} (u-k)^{1^*}\,dx \right)^{1/1^*} \le c \int_{E_k} |Du(x)|\,dx \tag{4.12}$$

dove, denotata con ω_n la misura della sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$, $c = \frac{1}{n{\omega_n}^{1/n}}$ e quindi è una costante indipendente da u.

Applicando poi la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_{E_k} (u-k)\,dx \le |E_k|^{1-1/1^*} \left(\int_{E_k} (u-k)^{1^*}\,dx \right)^{1/1^*}. \tag{4.13}$$

Dalla (4.11), per la (4.12) e (4.13), si ottiene la seguente maggiorazione

$$n{\omega_n}^{1/n} \left(\int_{E_k} (u-k)^{1^*}\,dx \right)^{1/1^*} \le |E_k| + |H||E_k|^{1/n} \left(\int_{E_k} (u-k)^{1^*}\,dx \right)^{1/1^*}$$

e quindi

$$\left(n{\omega_n}^{1/n} - |H||\Omega|^{1/n}\right)\left(\int_{E_k}(u-k)^{1^*}\,dx\right)^{1/1^*} \leq |E_k|.$$

Per la (4.10) la quantità $c = n{\omega_n}^{1/n} - |H||\Omega|^{1/n}$ risulta positiva, quindi dividendo i due membri della precedente disuguaglianza per c, si ottiene

$$\left(\int_{E_k}(u-k)^{1^*}\,dx\right)^{1/1^*} \leq \frac{|E_k|}{c}.$$

A questo punto si procede applicando il lemma di Stampacchia, come si è fatto per il funzionale quadratico e si ottiene la maggiorazione a priori per la norma del minimo nello spazio $Lip(\bar{\Omega})$.

Per quanto riguarda la costruzione delle barriere occorre fare restrizioni su Ω e sulla curvatura media H. Precisamente se $|H| < (n-1)\Lambda(x)$,per ogni $x \in \partial\Omega$ dove $\Lambda(x)$ è stata introdotta nella (jjj) all'inizio del paragrafo 3, si possono costruire le barriere. Per concludere enunciamo il seguente teorema

Teorema 4.3 *Supponiamo che H e Ω verifichino la (4.10) e che $|H| < (n-1)\Lambda(x)$, per ogni $x \in \partial\Omega$. Supponiamo che $\varphi \in Lip(\partial\Omega)$, allora il problema*

$$\min\left\{\int_\Omega [(1+|Du(x)|^2)^{1/2} + Hu(x)]\,dx : u(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega\right\}$$

ammette una ed una sola soluzione.

Osservazione Le condizioni date su H e su Ω nel precedente teorema sono anche necessarie per l'esistenza del minimo.

Osserviamo infine che i risultati qui esposti non sono i migliori possibili e che alcuni di questi risultati sono stati migliorati con tecniche raffinate.

CAPITOLO VII

CALCOLO DELLE VARIAZIONI PER INTEGRALI MULTIPLI IN CLASSE DI SOBOLEV

In questo capitolo estenderemo alcuni dei concetti sviluppati in precedenza per applicarli a problemi più generali di quelli affrontati finora che si ritroveranno quindi, come casi particolari. Inoltre il fatto di aver studiato prima problemi semplici in contesti meno generali, dovrebbe aiutare la comprensione dei concetti più astratti che andremo a formulare.

§1 Teorema di Weierstrass in spazi topologici

Definizione 1.1 *Sia X un insieme non vuoto. Si chiama topologia su X una famiglia τ di suoi sottoinsiemi con le seguenti proprietà:*

(*i*) *$X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$;*
(*ii*) *Per ogni famiglia $\{\mathcal{A}_i\}$, finita o non, di elementi di τ risulta $\bigcup_i \mathcal{A}_i \in \tau$;*
(*iii*) *Per ogni famiglia $\{\mathcal{A}_i\}$ finita di elementi di τ risulta $\bigcap_i \mathcal{A}_i \in \tau$.*

La coppia (X, τ) si chiama spazio topologico. *Gli elementi di τ si chiamano* insiemi aperti. *Si dice che un insieme $\mathcal{C}$ è un* chiuso *se il suo complementare $\mathcal{C}^c$ è un aperto, quindi se $\mathcal{C}^c \in \tau$.*

Esempio 1.1 Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\tau := \{\mathbb{R}, \emptyset, \bigcup_i (a_i, b_i) \quad \text{con} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\}$. Allora τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

In uno spazio topologico l'intorno di un punto è un qualunque insieme che contiene un aperto contenente il punto. Si dice *base* o *sistema fondamentale di intorni di un punto* $x \in X$ una famiglia di intorni $\mathcal{F}$ di x tale che ogni intorno di x contiene un intorno di $\mathcal{F}$.

Definizione 1.2 *Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X. Diremo che essa converge ad un punto $x_0 \in X$ se, per ogni aperto $\mathcal{A}$ di x contenente x_0, esiste un intero n_0 tale che per ogni $n > n_0$ risulta $x_n \in \mathcal{A}$.*

Osservazione In uno spazio topologico astratto, il limite di una successione convergente può non essere unico.

Infatti, come esempio, consideriamo lo spazio topologico (X, τ) dove X è un insieme che contiene almeno due punti e τ è la topologia *indiscreta* cioè quella che contiene come aperti solo $\emptyset$ e X stesso. Si vede facilmente che una qualunque successione $\{x_n\} \subset X$ converge ad ogni punto di X.

Una condizione sufficiente affinché il limite sia unico è che per ogni coppia di punti distinti di X, x_1, x_2, esistano due aperti disgiunti U_1 e U_2, tali che $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$.

DEFINIZIONE 1.3 *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice continua su X se la controimmagine di un qualunque aperto di $\mathbb{R}$ è un aperto in X. In particolare si ha che $f^{-1}((a, b)) \in \tau$ per ogni $(a, b) \subset \mathbb{R}$.*

Una funzione f si dice sequenzialmente continua *su X se per ogni $x \in X$ e per ogni successione tale che $x_n \longrightarrow x$ si ha*

$$\lim_n f(x_n) = f(x).$$

DEFINIZIONE 1.4 *Un insieme $\mathcal{C}$ si dice sequenzialmente chiuso se, per ogni successione $\{x_n\} \subset \mathcal{C}$, convergente ad un punto $x \in X$ si ha che $x \in \mathcal{C}$.*

DEFINIZIONE 1.5 *Un insieme $\mathcal{K}$ si dice compatto se per ogni famiglia di aperti $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ tali che*

$$\mathcal{K} \subseteq \cup_{i \in I} \mathcal{A}_i,$$

esiste una sottofamiglia finita individuata da un insieme finito di indici I' tale che

$$\mathcal{K} \subseteq \cup_{i \in I'} \mathcal{A}_i.$$

Questa proprietà equivale al fatto che se si prende una famiglia di chiusi $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ tale che ogni sua sottofamiglia finita contiene, nella sua intersezione, almeno un punto di $\mathcal{K}$, allora $\bigcap_I \mathcal{C}_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.

Si dice che un insieme K è sequenzialmente compatto se da ogni successione $\{x_n\} \subseteq K$ è possibile estrarre una successione convergente ad un elemento di K.

Sia ora (X, τ) uno spazio topologico che, d'ora in avanti, indicheremo con X semplicemente. Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei reali con la topologia naturale, cioè quella introdotta nell'esempio (1.1).

DEFINIZIONE 1.6 *Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, si dice semicontinua inferiormente (s.c.i.) se per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $U_a^f = \{x \in X : f(x) > a\}$ è aperto in X oppure, equivalentemente, l'insieme $V_a^f = X - U_a^f = \{x \in X : f(x) \leq a\}$ è chiuso.*

Vogliamo ora caratterizzare le funzioni semicontinue inferiormente. A tale scopo introduciamo la nozione di epigrafico di una funzione.

DEFINIZIONE 1.7 *Si chiama* epigrafico di f *l'insieme*

$$E^f := \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq a\}$$

Evidentemente l'epigrafico di f è un sottoinsieme dello spazio prodotto $X \times \mathbb{R}$.

Sullo spazio prodotto cartesiano di due spazi topologici X_1 e X_2, la topologia naturale è quella per cui sono aperti gli insiemi ottenuti come unioni di prodotti cartesiani $A \times B$, con A e B aperti rispettivamente di X_1 e X_2.

Lemma 1.1 *Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, è semicontinua inferiormente se e solo se il suo epigrafico è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.*

Dim. Supponiamo che l'epigrafico di f sia chiuso in $X \times \mathbb{R}$. Per ogni a fissato risulta anche chiusa l'intersezione $E^f \bigcap \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} : x \in X\}$ e quindi V_a^f che è l'insieme traslato del precedente di un vettore a. Quindi la funzione f è semicontinua inferiormente. Viceversa sia f s.c.i. e quindi, per ogni $a \in \mathbb{R}$ fissato, l'insieme U_a^f sia aperto in X. Allora anche l'insieme $W_a^f = U_a^f \times \{b \in \mathbb{R} : b < a\}$ è aperto in $X \times \mathbb{R}$. Ne segue che è aperto l'insieme $W^f = \cup_{a \in \mathbb{R}} W_a^f = X \times \mathbb{R} - E^f$ ed il suo complementare E^f è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

Definizione 1.8 *Si dice che uno spazio topologico X verifica il primo assioma di numerabilità, se ogni punto di X è dotato di una base di intorni numerabile.*

Gli spazi metrici e, di conseguenza gli spazi di Banach, sono di questo tipo. Una ulteriore caratterizzazione delle funzioni s.c.i. è la seguente:

Lemma 1.2 *Supponiamo che lo spazio topologico X verifichi il primo assioma di numerabilità. Allora una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è semicontinua inferiormente se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $x_n \longrightarrow x \in X$ risulta $f(x) \leq \liminf_n f(x_n)$.*

Dim. Proviamo che la condizione è necessaria. Sia $\{x_n\} \subset X$ tale che $x_n \longrightarrow x \in X$ e sia $l = \liminf_n f(x_n) < +\infty$. Per ogni numero reale $a > l$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ tale che $f(x_{n_k}) \leq a$ per ogni k, quindi x appartiene alla chiusura di V_a^f. Poichè V_a^f è chiuso per ogni a, abbiamo

$$x \in \bigcap_{a>l} V_a^f$$

da cui $f(x) \leq l$. Osserviamo che questo prova in particolare che $x_n \longrightarrow x \in X$ implica che $l > -\infty$.

Viceversa supponiamo che $x_n \longrightarrow x \in X$ implica che $f(x) \leq \liminf_n f(x_n)$ e proviamo che E^f è chiuso. Per l'ipotesi fatta su X sarà sufficiente provare che E^f è chiuso per successioni. Allora sia $(x_n, a_n) \in E^f$ per ogni n e sia $(x, a) = \lim_n (x_n, a_n)$ in $X \times \mathbb{R}$. Poichè $x = \lim_n x_n$, $a = \lim_n a_n$ e $f(x_n) \leq a_n$ per ogni n, si ha

$$f(x) \leq \liminf_n f(x_n) \leq lim_n a_n = a$$

e quindi $(x, a) \in E^f$.

Una importante proprietà delle funzioni semicontinue inferiormente è espressa dal lemma seguente.

LEMMA 1.3 *Sia J un insieme di indici. Siano $f_j : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $j \in J$ funzioni semicontinue inferiormente. Allora la funzione*

$$f := \sup_{j \in J} f_j$$

è semicontinua inferiormente.

DIM. È chiaro che $E^f = \bigcap_J E^{f_j}$. Poichè, per il lemma 1.1, E^{f_j} è chiuso per ogni j, anche E^f è chiuso e, riapplicando il lemma 1.1 si conclude.

OSSERVAZIONE Se le funzioni f_j sono continue $f := \sup_{j \in J} f_j$ non è necessariamente una funzione continua, tuttavia è s.c.i.

Dimostriamo ora una generalizzazione del teorema di Weierstrass.

TEOREMA 1.4 *Siano (X, τ) uno spazio topologico, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione semicontinua inferiormente e sia $\mathcal{K}$ un sottoinsieme compatto di X. Allora f ammette minimo in $\mathcal{K}$.*

DIM. Se $f \equiv +\infty$ non dobbiamo provare nulla. Supponiamo quindi $f \not\equiv +\infty$ e poniamo

$$\mu := \inf\{f(x) : x \in \mathcal{K}\} < +\infty.$$

Poichè f è s.c.i., per ogni $a > \mu$, l'insieme V_a^f è chiuso e quindi $W_a = \mathcal{K} \bigcap V_a^f$ è un chiuso non vuoto nella topologia relativa di $\mathcal{K}$. La famiglia $(W_a)_{a>\mu}$ ha la proprietà dell'intersezione finita perché, qualunque siano $a_i, i = 1, ..., n$, detto $\bar{a}$ il loro minimo, risulta evidentemente

$$\bigcap_{i=1}^{n} W_{a_i} = W_{\bar{a}} \neq \emptyset.$$

Dalla proprietà di compattezza di $\mathcal{K}$, esiste un $x_0 \in \mathcal{K}$ tale che $x_0 \in V_a^f$ per ogni $a > \mu$ e questo implica che $f(x_0) = \mu$.

OSSERVAZIONE Nel precedente teorema si può sostituire la compattezza con la sequenziale compattezza. Basta infatti prendere, per ogni n intero un $x_n \in W_{k_n}$ con $\{k_n\}$ successione decrescente verso μ. Esistono allora una successione estratta da $\{x_n\}$, che indichiamo ancora con $\{x_n\}$ e un punto $x_0 \in \mathcal{K}$ tali che $x_n \to x_0$. Ne segue che $x_0 \in W_k$ per $k > \mu$ e dunque $f(x_0) = \mu$.

OSSERVAZIONE Accanto alla definizione di funzione s.c.i. si pone in modo naturale quella di funzione semicontinua superiormente(s.c.s.).

Si dice che $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è semicontinua superiormente se, per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $U_a^f := \{x \in X : f(x) < a\}$ è aperto in X. Risulta chiaro che, se f è s.c.i., la sua opposta, $-f$, è s.c.s. Per le funzioni s.c.s. vale l'analogo del teorema appena dimostrato: una funzione s.c.s. in un compatto ammette massimo.

Osserviamo infine che una funzione è continua se e solo se è contemporaneamente s.c.i. e s.c.s.

Definizione 1.9 *Sia X uno spazio topologico e T un insieme. Diremo che una funzione $f : X \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ è equicontinua in X al variare di $t \in T$, se per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno $A_\epsilon(x_0)$ di x_0 in X tale che*

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| < \epsilon \qquad \forall x \in A_\epsilon(x_0)$$

qualunque sia $t \in T$.

Diamo ora il seguente criterio di equicontinuità rispetto al parametro $t \in T$.

Lemma 1.5 *Siano X uno spazio topologico, T un insieme e $f : X \times T \longrightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $r > 0$ esiste un sottoinsieme T_r di T tale che:*

(i) $f : X \times T_r \longrightarrow \mathbb{R}$ è equicontinua in X al variare di t in T_r;

(ii) per ogni $t \in T$ esiste un $s \in T_r$ tale che

$$|f(x,t) - f(x,s)| < 1/r \qquad \forall x \in X.$$

Allora f è equicontinua in X al variare di t in T.

Dim. Siano $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Scegliamo $r > 3/\epsilon$. Per la (i), esiste un intorno $A_\epsilon(x_0)$ di x_0 in X tale che

$$|f(x,s) - f(x_0,s)| < \epsilon/3 \qquad \forall x \in A_\epsilon(x_0), s \in T_r. \tag{1.1}$$

Per la (ii), per ogni $t \in T$ esiste $s \in T_r$ tale che

$$|f(x,t) - f(x,s)| < 1/r < \epsilon/3 \qquad \forall x \in X;$$

quindi, in particolare, per $x = x_0$

$$|f(x_0,t) - f(x_0,s)| < \epsilon/3. \tag{1.2}$$

Dalle (1.1) e (1.2),osservando che

$$f(x,t) - f(x_0,t) = f(x,t) - f(x,s) + f(x,s) - f(x_0,s) + f(x_0,s) - f(x_0,t)$$

e applicando la disuguaglianza triangolare, si ha

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| < \epsilon \qquad \forall x \in A_\epsilon(x_0), \forall t \in T.$$

Il lemma che segue mostra che una funzione $f(x,y)$ semicontinua nella variabile y, che sia equicontinua in x rispetto alla y risulta semicontinua nella coppia di variabili.

LEMMA 1.6 *Siano X e Y spazi topologici, E un sottoinsieme denso di X e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

(i) *per ogni fissato $x \in E$, $f(x,\cdot)$ sia s.c.i.;*

(ii) *f sia equicontinua in $x \in X$ rispetto al parametro $y \in Y$.*

Allora f è semicontinua nello spazio topologico prodotto $X \times Y$.

DIM. Dobbiamo provare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$U_a^f = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > a\}$$

è aperto in $X \times Y$. Siano $x_0 \in E$ ed $\epsilon > 0$ arbitrari, per la (i) l'insieme

$$U_{a+\epsilon}^{f(x_0,\cdot)} = \{y \in Y : f(x_0,y) > a + \epsilon\}$$

è aperto in Y. Per la (ii), esiste un intorno aperto $A_\epsilon(x_0)$ di x_0 in X tale che

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \epsilon \qquad \forall x \in A_\epsilon(x_0), \forall y \in Y. \tag{1.3}$$

L'insieme

$$W_a^f(x_0,\epsilon) = A_\epsilon(x_0) \times U_{a+\epsilon}^{f(x_0,\cdot)}$$

è aperto in $X \times Y$; inoltre, per ogni $(x,y) \in W_a^f(x_0,\epsilon)$, dalla (1.3) si ha che $f(x,y) > a$ e quindi $(x,y) \in U_a^f$. Abbiamo provato che $W_a^f(x_0,\epsilon) \subset U_a^f$. Ne segue che l'insieme definito da

$$W_a^f := \bigcup_{x_0 \in E, \epsilon > 0} W_a^f(x_0,\epsilon)$$

è un sottoinsieme aperto di U_a^f. Inoltre ogni $(x,y) \in U_a^f$ appartiene a qualche $W_a^f(x_0,\epsilon)$ per $x_0 \in E$ abbastanza vicino ad x e per ϵ abbastanza piccolo. Dunque si conclude che U_a^f è aperto perchè

$$U_a^f \equiv W_a^f.$$

§2 FUNZIONI CONVESSE

In questo paragrafo indicheremo con X uno spazio normato e, per $x_0 \in X$ e $r > 0$, con $B_r(x_0)$ e $S_r(x_0)$ rispettivamente la sfera di centro x_0 e raggio r e la sua frontiera, cioè

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\},$$

$$S_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}.$$

È noto che, in ogni spazio di dimensione finita, un funzionale lineare è continuo; se X non ha dimensione finita, esistono funzionali lineari non continui, un funzionale lineare essendo continuo se e solo se è limitato su una sfera. Proprietà analoghe valgono per i funzionali convessi.

Lemma 2.1 *Sia f convessa in $B_{r_0}(x_0)$ tale che*

$$\sup\{f(x) : x \in S_{r_0}(x_0)\} = M < +\infty.$$

Allora risulta per ogni $x \in B_{r_0}(x_0)$

$$-2|f(x_0)| - |M| \leq f(x) \leq M.$$

Dim. Poichè l'involucro convesso di $S_{r_0}(x_0)$ coincide con $B_{r_0}(x_0)$, ogni elemento $x \in B_{r_0}(x_0)$ si può scrivere come $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ dove $\lambda \in [0,1]$ e $x_1, x_2 \in S_{r_0}(x_0)$. Dalla convessità di f segue subito $f(x) \leq M$. D'altra parte, se $x \in B_{r_0}(x_0) - \{x_0\}$, la semiretta di origine x e direzione $x_0 - x$ incontra $S_{r_0}(x_0)$ in un punto x_M. Posto $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)x_M$, si vede che $x - x_0 = (1-\lambda)(x - x_M)$ da cui, ricavando $1-\lambda$ e, successivamente, λ, si trova

$$x_0 = \frac{\|x_0 - x_M\|}{\|x - x_M\|}x + \frac{\|x_0 - x\|}{\|x - x_M\|}x_M$$

e inoltre si verifica facilmente che

$$(2.1) \qquad r_0 \leq \|x - x_M\| \leq 2r_0, \quad \|x_0 - x_M\| = r_0, \quad 0 \leq \|x_0 - x\| \leq r_0.$$

Per la convessità della f e poichè $x_M \in S_{r_0}(x_0)$, si ha

$$f(x_0) \leq \frac{\|x_0 - x_M\|}{\|x - x_M\|}f(x) + \frac{\|x_0 - x\|}{\|x - x_M\|}f(x_M) \leq \frac{\|x_0 - x_M\|}{\|x - x_M\|}f(x) + \frac{\|x_0 - x\|}{\|x - x_M\|}M.$$

Da questa stima e dalle (2.1) troviamo

$$\begin{aligned} r_0 f(x) &\geq \|x - x_M\| f(x_0) - \|x_0 - x\| M \\ &\geq -\|x - x_M\| |f(x_0)| - \|x_0 - x\| M \geq -2r_0|f(x_0)| - r_0|M| \end{aligned}$$

da cui la tesi.

Teorema 2.2 *Sia f convessa in $B_{r_0}(x_0)$ tale che*

$$\sup\{f(x) : x \in S_{r_0}(x_0)\} = M < +\infty.$$

Allora, posto

$$m := \inf\{f(x) : x \in B_r(x_0)\} > -\infty,$$

per ogni $r \in (0, r_0)$ *e per ogni* $x_1, x_2 \in B_r(x_0)$*, si ha*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{M-m}{r_0 - r}\|x_1 - x_2\|. \tag{2.2}$$

Dim. Posto $a = r_0 - r$, proviamo la (2.2) dapprima nell'ipotesi che $\|x_1 - x_2\| \leq a$. Sia $x_1 \in B_r(x_0)$. È evidente che $B_a(x_1) \subset B_{r_0}(x_0)$. Consideriamo, per $y \in B_a(0)$, la funzione definita da

$$g(y) := f(x_1 + y) - f(x_1).$$

Essa è convessa, $g(0) = 0$ e inoltre

$$g(y) \leq M - f(x_1) \quad \forall y \in B_a(0). \tag{2.3}$$

Applicando la convessità

$$g(tu + (1-t)v) \leq tg(u) - (1-t)g(v) \tag{2.4}$$

per $u = \frac{ay}{\|y\|} \in \bar{B}_a(0)$, $y \neq 0$ e $\|y\| \leq a$, $v = 0$, $t = \frac{\|y\|}{a}$ e ricordando la (2.3) si ha

$$g(y) \leq \frac{\|y\|}{a} g\left(\frac{ay}{\|y\|}\right) \leq \frac{\|y\|}{a}[M - f(x_1)]. \tag{2.5}$$

D'altra parte, applicando la (2.4) per $u = y \in B_a(0)$, $v = -\frac{ay}{\|y\|}$, $t = \frac{a}{a+\|y\|}$, si ha

$$\begin{aligned} 0 = g(0) =& g\left(\frac{a}{a+\|y\|}y + \frac{\|y\|}{a+\|y\|}(-\frac{ay}{\|y\|})\right) \\ &\leq \frac{a}{a+\|y\|}g(y) + \frac{\|y\|}{a+\|y\|}g\left(-\frac{ay}{\|y\|}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$g(y) \geq -\frac{\|y\|}{a} g\left(-\frac{ay}{\|y\|}\right) \geq -\frac{\|y\|}{a}[M - f(x_1)]. \tag{2.6}$$

Dalle (2.5) e (2.6), per $\|y\| < a$. si ricava

$$|g(y)| \leq [M - f(x_1)]\frac{\|y\|}{a}$$

di conseguenza, per $x_2 = x_1 + y$ e per la definizione di g

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq [M - f(x_1)]\frac{\|x_2 - x_1\|}{a}$$

da cui segue subito la (2.2).

In generale, se $\|x_2-x_1\| > a$, si considerano sul segmento $y_t = x_2+t(x_1-x_2), t \in [0,1]$ gli $r+2$ punti $y_{t_0}, y_{t_1}, ..., y_{t_{r+1}}$ con $t_0 = 0, t_{r+1} = 1, t_j = \frac{ja}{\|x_1-x_2\|}$ per $j = 1, ..., r$ ed r uguale alla parte intera di $\frac{\|x_1-x_2\|}{a}$.

È evidente che $\|y_{t_{j+1}} - y_{t_j}\| \leq a$ per ogni j e che

$$\sum_{j=0}^{r+1} \|y_{t_{j+1}} - y_{t_j}\| = \|x_1 - x_2\|.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq \sum_{j=0}^{r+1} |f(y_{t_{j+1}}) - f(y_{t_j})| \\ &\leq \sum_{j=0}^{r+1} \frac{M-m}{a} \|y_{t_{j+1}} - y_{t_j}\| = \frac{M-m}{a} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione.

Prima di dare un corollario di questo teorema introduciamo la seguente definizione.

Definizione 2.1 *Si dice che una funzione f è localmente lipschitziana in un aperto A se, per ogni $x \in A$, esistono un intorno U di x e una costante $k > 0$ tali che*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

Corollario 2.3 *Se f è convessa ed è localmente limitata superiormente in un aperto A dello spazio normato X allora f è localmente lipschitziana in A.*

Proviamo ora che la tesi del corollario 2.3 vale, nel caso che A sia convesso, nella sola ipotesi che f sia limitata in un intorno di un punto di A.

Lemma 2.4 *Se f è convessa in un aperto convesso A ed è limitata superiormente in un intorno di un punto x_0 di A, allora f è limitata superiormente in un intorno di ogni punto di A.*

Dim. Sia $U \subset A$ un intorno di x_0 tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in U$. Sia y un punto qualunque di A. Esiste allora un numero $b > 1$ tale che $z = by+(1-b)x_0 \in A$. Posto $t = 1 - 1/b$, sia h l'omotetia $x \longrightarrow tx + (1-t)z$ di centro z e rapporto t che manda x_0 in y. L'intorno U di x_0 viene trasformato dalla h nell'intorno $W = h(U)$

di y ed inoltre, per la convessità di A, $W \subset A$. Poichè f è convessa in tutti i punti $h(x) \in W$ si ha

$$f(h(x)) = f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \leq tM + (1-t)f(z).$$

La f è quindi limitata superiormente nell'intorno W di y.

Dal corollario 2.3 e dal lemma 2.4 segue il teorema

TEOREMA 2.5 *Se f è convessa in un aperto convesso A ed è limitata superiormente in un intorno di un punto x_0 di A, allora f è localmente lipschitziana in A.*

Il seguente risultato riguarda gli spazi di dimensione finita.

TEOREMA 2.6 *In uno spazio di Banach X di dimensione finita ogni funzione convessa è localmente lipschitziana.*

DIM. Dai teoremi 2.2 e 2.5, basta provare che f è limitata superiormente in un intorno di un punto $x_0 \in X$. Senza alcuna restrizione possiamo supporre $x_0 = 0$ e, per semplicità, $X \equiv \mathbb{R}^n$. Siano $e_1, ...e_n$ gli n vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo, con $b > 0$, il cubo definito dalle relazioni $-b \leq x_j \leq b$, $j = 1, ..., n$. È chiaro che la sfera aperta U di centro 0 e raggio $b/\sqrt{n}$ è contenuto nell'involucro convesso dei $2n$ vettori

$$v_1 = be_1, ..., v_n = be_n,\ v_{n+1} = -be_1, ..., v_{2n} = -be_n.$$

Allora, per $x \in U$, abbiamo

$$x = \sum_{j=1}^{2n} t_j v_j; \quad \sum_{j=1}^{2n} t_j = 1; t_j \geq 0$$

e, per la convessità di f,

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{2n} t_j v_j\right) \leq \sum_{j=1}^{2n} t_j f(v_j);$$

ne segue, posto $M = max\{f(v_1), ..., f(v_{2n})\}$, che

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in U$$

e quindi la tesi.

È noto che, per una famiglia di funzionali lineari, le proprietà di equilimitatezza e di equicontinuità coincidono. Un risultato analogo vale per le funzioni convesse. Precisamente vale il teorema

Teorema 2.7 *Sia $\{f_i(x)\}$ una famiglia di funzioni convesse definite nell'aperto convesso A di $\mathbb{R}^n$ ed equilimitate in ciascun punto di A. Allora le f_i risultano localmente equilipschitziane in A.*

Dim. Cominciamo con il dimostrare che la equilimitatezza delle f_i in ciascun punto di A implica la equilimitatezza locale in A. Per ogni $x \in A$ poniamo

$$G(x) = \sup_i f_i(x) < +\infty; \qquad g(x) = \inf_i f_i(x) > -\infty.$$

Preso un punto $x_0 \in A$ si considerino $2n$ punti $v_1, ..., v_{2n} \in A$, tali che il loro involucro convesso contenga la sfera chiusa $B_{r_0}(x_0)$. Poichè per ipotesi $f_i(v_j) \leq G(v_j)$, $j = 1, ..., 2n$, dalla convessità delle f_i segue che

$$f_i(x) \leq \max\{G(v_1), ..., G(v_{2n})\} = M \quad x \in S_{r_0}(x_0)$$

. Dal lemma 2.1 segue che, per $x \in B_{r_0}(x_0)$

$$f_i(x) \geq -|M| - 2|f_i(x_0)|$$

e, poichè $|f_i(x_0)| \leq \max(|G(x_0)|, |g(x_0)|) = L$, si ha

$$m \leq f_i(x) \leq M \quad \forall x \in B_{r_0}(x_0)$$

dove si è posto $m = -|M| - 2L$.

D'altra parte, posto $a = r_0 - r$, $0 < r < r_0$, dal teorema 2.2 si ha

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| \leq \frac{M_i - m_i}{a}\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_r(x_0),$$

dove $M_i := max\{f_i(x) : \ x \in S_{r_0}(x_0)\}$ e $m_i := min\{f_i(x) : \ x \in B_{r_0}(x_0)\}$. Poichè $M_i \leq M$ e $m_i \geq m$, si ha

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| \leq \frac{M - m}{a}\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_r(x_0),$$

da cui segue la equilipschitzianità locale delle $\{f_i\}$.

Proviamo ora un teorema sulla continuità delle funzioni convesse dipendenti da un parametro.

Teorema 2.8 *Sia $f(y,z)$ continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{R}^n$ e convessa in z per ogni $y \in \mathbb{R}$. Allora*

(i) f è equicontinua in $z \in \mathbb{R}^n$ rispetto a y in ogni compatto di $\mathbb{R}$;
(ii) f è continua nello spazio prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
(iii) la funzione $y \to f(y, \cdot)$ è un'applicazione continua di $\mathbb{R}$ nello spazio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue in $\mathbb{R}^n$ munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Dim. Le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) non fanno uso della convessità di f nella seconda variabile.

Proviamo che (i) $\Rightarrow$ (ii) utilizzando anche l'ipotesi che f è continua nella prima variabile. Fissiamo (x_0, y_0) in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e un numero $\eta > 0$. Per la continuità uniforme sui compatti dovuta all'ipotesi (i) esiste un $\delta_1 > 0$ tale che $|f(y,z) - f(y,z_0)| < \eta/2$ se $|y-y_0| \leq 1$ e $|z-z_0| < \delta_1$. Per la continuità della funzione f nella prima variabile, esiste un $\delta_2 > 0$, che possiamo supporre minore di 1, tale che $|f(y,z_0) - f(y_0,z_0)| < \eta/2$ se $|y-y_0| < \delta_2$. In definitiva, se $|y-y_0| < \delta_2$ e $|z-z_0| < \delta_1$, abbiamo

$$|f(y,z) - f(y_0,z_0)| \leq |f(y,z) - f(y,z_0)| + |f(y,z_0) - f(y_0,z_0)| < \eta.$$

Proviamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (iii). Dobbiamo dimostrare che, fissato un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, esiste $\delta > 0$ tale che $\sup_{z\in K} |f(y,z) - f(y_0,z)| < \epsilon$ se $|y-y_0| < \delta$. Per la (ii), per ogni $\bar{z} \in K$ esistono un intorno $U(\bar{z})$ di $\bar{z}$ contenuto in $\mathbb{R}^n$ e un $\delta(\bar{z}) > 0$ tali che

$$|f(y,z) - f(y_0,\bar{z})| < \epsilon/2$$

se $|y-y_0| < \delta(\bar{z})$ e $z \in U(\bar{z})$. Al variare di $\bar{z}$ in K gli intorni $U(\bar{z})$ ricoprono K e, poichè K è compatto, possiamo trovare un numero finito di intorni $U(z_1), ..., U(z_m)$ che ricoprono ancora K. Posto $\delta = \min_{1\leq j\leq m} \delta(z_j)$, se $|y-y_0| < \delta$ e $z \in K$ allora

$$|f(y,z) - f(y_0,z)| \leq \min_j (|f(y,z) - f(y_0,z_j)| + |f(y_0,z_j) - f(y_0,z)|) < \epsilon.$$

Resta da provare che, nelle ipotesi del teorema vale la (i). Al variare di y in un compatto di $\mathbb{R}$ la famiglia delle funzioni convesse $f(y,\cdot)$ è equilimitata in ciascun punto $z \in \mathbb{R}^n$ per la continuità in $\mathbb{R}$ della funzione $f(\cdot,z)$; ne segue, utilizzando il teorema 2.7, che le funzioni $f(y,\cdot)$ sono localmente equicontinue in $\mathbb{R}^n$.

§3 Approssimazione di funzioni convesse

In questo paragrafo faremo vedere come una arbitraria funzione convessa in $\mathbb{R}^n$ si possa approssimare dal basso, uniformemente su ogni compatto, con una successione non decrescente di funzioni convesse che hanno all'infinito una crescita, al più, del primo ordine. Ciascuna delle approssimanti è in effetti il massimo di un numero finito di funzioni affini (cioè polinomi di primo grado). Le particolari approssimazioni considerate hanno la seguente importante proprietà: i coefficienti di ciascuna funzione affine minorante dipendono linearmente dalla funzione f e con continuità nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. Tale proprietà permette, come vedremo, di dimostrare facilmente che, se la funzione f dipende con continuità da un parametro y, anche ciascuna delle approssimanti dipende con continuità da y. In altre parole per approssimare una funzione $f(y,z)$ continua in y e convessa in z, basterà per ciascun y, approssimare nel modo descritto prima, la funzione convessa $f(y,\cdot)$: ciascuna delle approssimanti costruita in tal modo, risulterà continua in y e a crescita al più del primo ordine in z (in quanto massimo di un numero finito di funzioni $f_i(y,z)$ continue in y e affini in z). In modo analogo approssimeremo dal basso una funzione $f(x,y,z)$ misurabile in x, continua in y e convessa in z con una successione non decrescente di funzioni $g(x,y,z)$ che hanno in z crescita , al più, del primo ordine e sono ancora misurabili in x, continue in y (inoltre a supporto compatto nella coppia (x,y)) ed equiuniformemente lipschitziane in z al variare di (x,y).

Consideriamo dapprima $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa, di classe $\mathcal{C}^1$. Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ il piano tangente al grafico della f nel punto $(p, f(p)$ ha equazione $A(p,z) = 0$ dove

$$A(p,z) := f(p) + \sum_{h=1}^{n} D_h f(p)(z_h - p_h) \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Per la convessità della f, $A(p,z)$ è, per ogni p, una minorante di f cioè

$$f(z) \geq A(p,z) \qquad \forall p, z \in \mathbb{R}^n,$$

inoltre $f(p) = A(p,p)$ e quindi

$$f(z) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} A(p,z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Poichè l'insieme $\mathcal{Q}^n$ delle $n-$ple di razionali è un sottoinsieme numerabile denso di $\mathbb{R}^n$, proviamo che l'estremo superiore considerato non decresce se facciamo variare p in $\mathcal{Q}^n$. Infatti per $p \in \mathcal{Q}^n$, si ha ancora

$$f(p) = \sup_{q\in\mathcal{Q}^n} A(q,p)$$

e, poichè $f(z)$ e $\sup_{q\in\mathcal{Q}^n} A(q,z)$ sono funzioni convesse, quindi continue di z abbiamo anche

$$f(z) = \sup_{q\in\mathcal{Q}^n} A(q,z) \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, se $\{q_1, ..., q_n, ...\}$è un ordinamento di $\mathcal{Q}^n$, per ogni $j = 1, ...n, ..$ poniamo

$$f_j(z) = \sup_{i\leq j} A(q_i,z) \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

La successione definita in (3.1) è non decrescente:$f_j \leq f_{j+1}$ per ogni j, f_j è massimo di un numero finito di funzioni affini e converge puntualmente alla funzione $f(z)$, cioè

$$f(z) = \lim_j f_j(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre la convergenza è uniforme su ogni compatto per un classico teorema del Dini: *una successione non decrescente di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione continua, converge uniformemente su ogni compatto.* Ora è ovvio che $\sup f_j \leq f$; d'altra parte, per ogni $q \in \mathcal{Q}^n$, $A(q,z) \leq f_j(z)$ per j abbastanza grande e quindi $A(q,z) \leq \sup_j f_j(z)$ che comporta

$$f(z) = \sup_{q \in \mathcal{Q}^n} A(q,z) = \sup_j f_j(z).$$

Nel seguito, quando occorrerà rendere esplicita la dipendenza di $A(p,z)$ dalla funzione f , scriveremo $A(f,p,z)$ oppure $A(f,p)(z)$. Inoltre, per esplicitare i coefficienti di $A(f,p,z)$, funzione affine di z, porremo anche

$$A(f,p,z) = A(f,p)(z) = a_0(f,p) + \sum_{h=1}^{n} a_h(f,p) z_h \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

dove

$$\begin{cases} a_0(f,p) = f(p) - \sum_{h=1}^n p_h D_h f(p) & \text{per } p \in \mathbb{R}^n \\ a_h(f,p) = D_h f(p) \end{cases} \tag{3.3}$$

Osserviamo infine che i coefficienti definiti in (3.3) sono funzioni lineari di f continui nella topologia indotta dalle seminorme

$$\sup_K |f| + \sum_{h=1}^{n} \sup_K |D_h f|, \quad \text{K compatto di} \quad \mathbb{R}^n$$

cioè nella topologia della convergenza uniforme sui compatti della funzione f e delle sue derivate prime $D_h f$.

Abbiamo dunque provato il seguente teorema

Teorema 3.1 *Sia f una funzione convessa di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $p \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo la funzione affine (3.2) con i coefficienti dati dalla (3.3).Allora*

(*i*) *I coefficienti sono, per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, funzioni lineari di f in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$;*

(*ii*) *Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$*

$$f(z) \geq A(f,p)(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n;$$

(*iii*) *Se denotiamo con $\mathcal{Q}^n$ l'insieme delle $n-$ple di razionali*

$$f(z) = \sup_{q \in \mathcal{Q}^n} A(f,q)(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n;$$

(*iv*) *Se $\{q_1, ..., q_n, ...\}$è un ordinamento prefissato di $\mathcal{Q}^n$, si ha*

$$f(z) = \lim_j f_j(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

dove

$$f_j(z) = \sup_{i \le j} A(f, q_i)(z).$$

L'approssimazione di $f(z)$ descritta nel teorema 3.1 ha due inconvenienti.

In primo luogo richiede che f sia di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, il che non può scaturire dall'ipotesi di convessità di f : sappiamo solo che, se f è una funzione convessa definita su tutto $\mathbb{R}^n$, essa è continua.

In secondo luogo le minoranti affini $A(f, p)$ della f che abbiamo indicato sopra, dipendono con continuità dalla f in una topologia che richiede la convergenza anche delle derivate, mentre, anche in vista della generalizzazione a funzioni convesse dipendenti da parametri, è più conveniente avere dipendenza continua da f nella topologia più debole delle seminorme

$$\sup_K |f| \qquad K \quad \text{compatto} \subset \mathbb{R}^n$$

cioè nella topologia della convergenza uniforme delle funzioni. Per superare queste difficoltà introduciamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3.1 *Sia $J \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione non negativa a valori reali con le proprietà:*

(j) $J(x) = 0$ *se* $|x| \ge 1$,
(jj) $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\, dx = 1$.

Per esempio possiamo prendere la funzione definita da

$$J(x) = \begin{cases} k \exp[\frac{-1}{1-|x|^2}] & \textit{se} \quad |x| < 1 \\ 0 \quad \textit{se} \quad |x| \ge 1, \end{cases}$$

dove $k > 0$ è scelto in modo che sia soddisfatta la condizione (jj). Per $\epsilon > 0$ la funzione $J_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} J(x/\epsilon)$ è non negativa, appartiene allo spazio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e verifica

(j') $J_\epsilon(x) = 0$ *se* $|x| \ge \epsilon$,
(jj') $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x)\, dx = 1$.

La funzione $J_\epsilon(x)$ si chiama mollificatore *e il prodotto di convoluzione definito da*

$$J_\epsilon * u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y) u(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(y) u(x-y)\, dy,$$

dove u è una funzione per cui l'integrale abbia senso, si chiama mollificazione *o* regolarizzazione *di u.*

Enunciamo senza dimostrarle alcune proprietà della regolarizzazione di u.

Lemma 3.2 *Sia u una funzione definita in $\mathbb{R}^n$ che si annulla identicamente fuori di un aperto Ω. Allora*

(a) *Se $u \in L^1_{loc}(\bar{\Omega})$, allora $J_\epsilon * u(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Se, in aggiunta, $suppu \Subset \Omega$, allora per $\epsilon < dist(suppu, \partial\Omega)$ si ha*

$$J_\epsilon * u(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

(c) *Se $u \in L^p(\Omega)$ con $1 \le p < \infty$, allora $J_\epsilon * u(x) \in L^p(\Omega)$.Inoltre*

$$\|J_\epsilon * u(x)\|_p \le \|u\|_p \ ; \quad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \|J_\epsilon * u(x) - u\|_p = 0.$$

(d) *Se $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $G \Subset \Omega$ è un compatto, allora si ha uniformemente su G*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon * u(x) = u(x).$$

(e) *Se $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, allora si ha uniformemente su Ω*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon * u(x) = u(x).$$

Dalla definizione stessa di prodotto di convoluzione si vede che, se f è convessa allora $J_\epsilon * f$ è convessa; inoltre, dalla (d) del lemma 3.2, i prodotti di convoluzione $J_\epsilon * f$ convergono uniformemente ad f sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Questo ci suggerisce come ottenere delle minoranti di una funzione convessa, che non sia di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$; basta costruire minoranti delle regolarizzate $J_\epsilon * f$ della f le quali, diversamente dalla funzione $A(f,p)$, dipendano con continuità dalla funzione nella topologia della convergenza uniforme sui compatti: passando al limite si otterrà una minorante della f. Dimostriamo dapprima come sia possibile costruire, a partire dalle $A(f,p)$ delle minoranti che hanno la dipendenza richiesta dalla funzione.

Consideriamo ancora una funzione f convessa di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, la funzione affine di $z \in \mathbb{R}^n$

$$A(f,p,z) := f(p) + \sum_{h=1}^n D_h f(p)(z_h - p_h)$$

è, come sappiamo, una minorante affine di f, cioè

$$f(z) \ge A(f,p,z) \quad z, p \in \mathbb{R}^n.$$

Moltiplicando i due membri di questa disuguaglianza per la funzione J della definizione 3.1 e integrando rispetto alla variabile p su $\mathbb{R}^n$, si ha

$$f(z) \ge \mathcal{A}(f,J,z) = \int_{\mathbb{R}^n} A(f,p,z)J(p)\,dp.$$

Dunque $\mathcal{A}$ è una funzione affine di z, minorante di f. Sostituendo nell'integrale l'espressione di $A(f,p,z)$ ed integrando per parti, si trova:

$$\mathcal{A}(f,J,z) = (n+1)\int_{\mathbb{R}^n} f(p)J(p)\,dp - \sum_{h=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}(z_h - p_h)f(p)D_hJ(p)\,dp.$$

Quindi $\mathcal{A}(f,J,z)$, come funzione di $z \in \mathbb{R}^n$ si può anche scrivere

$$\mathcal{A}(f,J)(z) = a_0(f,J) + \sum_{h=1}^{n} a_h(f,J)z_h \tag{3.4}$$

dove

$$\begin{cases} a_0(f,J) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(p)[(n+1)J(p) + \sum_{h=1}^{n} p_hD_hJ(p)]\,dp \\ a_h(f,J) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(p)D_hJ(p)\,dp. \qquad h = 1,...,n \end{cases} \tag{3.5}$$

I funzionali $a_0(f,J), a_h(f,J)$ lineari in f per ogni J hanno la continuità richiesta. Essi sono continui nella coppia (f,J) nella topologia prodotto $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$. Se indichiamo con $\mathcal{C}$ il sottoinsieme convesso di $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni $J \geq 0$ tali che $\int J(p)dp = 1$, abbiamo provato il seguente

Lemma 3.3 *Sia f una funzione convessa di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $J \in \mathcal{C}$. Allora la funzione $\mathcal{A}(f,J)$ in (3.4) è una minorante affine della f e i coefficienti dati da (3.5) sono, per ogni J, funzionali lineari continui nella coppia (f,J) nella topologia prodotto $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ cioè della convergenza uniforme sui compatti.*

Ora si può rimuovere l'ipotesi $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se f è convessa su $\mathbb{R}^n$, quindi continua, si può approssimare nella topologia della convergenza uniforme, con funzioni $J_k * f$ convesse, di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Sia $J \in \mathcal{C}$, per ogni k consideriamo $\mathcal{A}(J_k * f, J)$ minorante di $J_k * f$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$J_k * f(z) \geq \mathcal{A}(J_k * f, J)(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

poichè, dal lemma 3.3, $\mathcal{A}$ è continuo in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$f(z) \geq \mathcal{A}(f,J)(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

cioè il limite di minoranti di $J_k * f$ è una minorante di f.

Abbiamo così provato la (i) e la (ii) del seguente teorema

Teorema 3.4 *Sia f una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$ e sia $J \in \mathcal{C}$. Consideriamo la funzione (3.4) affine in z con i coefficienti dati da (3.5).Allora*

(i) I coefficienti sono funzionali bilineari continui nella coppia (f,J) in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$;

(*ii*) *Per ogni* $z \in \mathbb{R}^n$

$$f(z) \geq \mathcal{A}(f,J)(z) \qquad \forall J \in \mathcal{C};$$

(*iii*) *Se denotiamo con* $\mathcal{Q}$ *il sottoinsieme numerabile di* $\mathcal{C}$ *definito da*

$$\mathcal{Q} := \{\beta : \beta(z) = k^n J_0(k(z-q)) \; q \in \mathcal{Q}^n, k \in N\}$$

essendo $J_0 \in \mathcal{C}$*, si ha*

$$f(z) = \sup_{\beta \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}(f,\beta)(z);$$

(*iv*) *Se* $\{\beta_1, ..., \beta_m, ...\}$è *un ordinamento prefissato di* $\mathcal{Q}$*, si ha*

$$f(z) = \lim_j f_j(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

dove

$$f_j(z) = \sup_{i \leq j} \mathcal{A}(f,\beta_i)(z).$$

Osservazione Se $f \geq 0$ anche le f_j si possono supporre non negative. Basta infatti sostituire ciascuna f_j con la sua troncata $\max\{f_j, 0\}$; la successione così ottenuta ha ancora la proprietà (*iv*) del teorema precedente se si include in $\mathcal{Q}$ la funzione $\beta_0 \equiv 0$. Prima di dimostrare la (*iii*) del precedente teorema occorre fare alcune considerazioni. Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ abbiamo visto che

$$\mathcal{A}(f,J,z) = \int_{\mathbb{R}^n} A(f,p,z)J(p)\,dp$$

dove $A(f,p,z)$ è la minorante di f data dalla (3.2) e $J \in \mathcal{C}$. Consideriamo, per una qualunque funzione $\bar{J} \in \mathcal{C}$, la successione

$$\bar{J}_k(p) = k^n \bar{J}(kp),$$

la quale tende alla misura di Dirac nell'origine per $k \longrightarrow \infty$, e, per un fissato $q \in \mathcal{Q}^n$, la successione delle traslate

$$\tau_q \bar{J}_k(p) = k^n \bar{J}(k(q-p)), \qquad p \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Allora abbiamo

$$\mathcal{A}(f,\tau_q\bar{J}_k,z) = A(f,p,z) * \bar{J}_k(q) \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

da cui

$$\lim_k \mathcal{A}(f,\tau_q\bar{J}_k,z) = A(f,q,z).$$

Per $z = q$, poichè $A(f, q, q) = f(q)$ si trova

$$\lim_k \mathcal{A}(f, \tau_q \bar{J}_k, q) = f(q) \quad q \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Con alcune considerazioni tecniche si prova che la (3.7) si ottiene anche senza l'ipotesi $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, ma solo convessa su $\mathbb{R}^n$.

A questo punto possiamo dimostrare la (iii) del precedente teorema.
Dim. Siano $q \in \mathcal{Q}^n$ e $k \in N$, la funzione $\tau_q \bar{J}_k$ è nella classe $\mathcal{C}$ e quindi $\mathcal{A}(f, \tau_q \bar{J}_k)$ minora f per la (ii). Se, per $z \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$g(z) := \sup_{\beta \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}(f, \beta, z) = sup\{\mathcal{A}(f, \tau_q \bar{J}_k, z) : \ q \in \mathcal{Q}^n, \ k \in N\}$$

risulta

$$g(z) \leq f(z) \qquad z \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre g è una funzione convessa, in quanto superiore di una famiglia di funzioni affini, e risulta finita su tutto $\mathbb{R}^n$ per la disuguaglianza precedente. Quindi g è, come f, una funzione continua in $\mathbb{R}^n$; per provare che $g \equiv f$ basta provare che, per ogni $q \in \mathcal{Q}^n$, $g(q) = f(q)$, per la densità di $\mathcal{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Questo segue in modo ovvio dalla (3.7). Infine la (iv) del teorema si prova ragionando come nel Teorema 3.1.

Consideriamo ora una funzione $f(y, z)$ continua in $y \in \mathbb{R}$ e convessa in $z \in \mathbb{R}^n$. Per quanto visto in precedenza f è continua nella coppia (y, z). Il teorema 3.4 permette di approssimare f con una successione di funzioni $f_k(y, z)$ continue in y ciascuna delle quali è il massimo di un numero finito di minoranti affini della $f(y, z)$ considerata come funzione di z. Più precisamente vale il teorema

Teorema 3.5 *Sia $f(y, z)$ una funzione a valori reali, continua in $y \in \mathbb{R}$ e convessa in $z \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste una successione non decrescente di funzioni $f_k(y, z)$ minoranti della f, ciascuna massimo di un numero finito di funzioni del tipo*

$$a_0(y) + \sum_{h=1}^{n} a_h(y) z_h \qquad \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$$

con $a_0(y), a_h(y)$ funzioni continue della y, tale che

$$f(y, z) = \lim_k f_k(y, z)$$

uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Dim. Sia $f_k(y, z)$, per ogni $y \in \mathbb{R}$, la successione di funzioni di z approssimanti la $f(y, z)$ esistente per la (iv) del teorema 3.4. Sappiamo che, per ogni $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, risulta che

$$f_1(y, z) \leq f_2(y, z) \leq ... \qquad ; \qquad \lim_k f_k(y, z) = f(y, z)$$

Inoltre, per ogni k, $f_k(y,z)$ è il massimo di un numero finito di funzioni del tipo

$$\mathcal{A}(f(y,\cdot),J,z) = a_0(f(y,\cdot),J) + \sum_{h=1}^{n} a_h(f(y,\cdot),J)z_h \quad z \in \mathbb{R}^n$$

dove $J \in \mathcal{C}$. Ora la funzione $y \longrightarrow (f(y,\cdot)$ è continua da $\mathbb{R}$ nello spazio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Dalla continuità dei coefficienti a_0 e a_h (si veda la (i) del Teorema 3.4) segue la continuità delle funzioni $y \longrightarrow a_h(f(y,\cdot),J)$. Dunque ogni approssimante è del tipo descritto nell'enunciato. Infine, poichè le $f_k(y,z)$ sono funzioni continue di (y,z) e convergono, non decrescendo, ad $f(y,z)$, esse convergono uniformemente sui compatti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Passando a considerare funzioni $f(x,y,z)$ misurabili in $x \in \mathbb{R}^n$, continue in $y \in \mathbb{R}$ e convesse in $z \in \mathbb{R}^n$, utilizzando i risultati precedenti, si può dimostrare il seguente teorema

Teorema 3.6 *Sia $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ misurabile in x per ogni (y,z), continua in y e convessa in z per quasi ogni x. Allora $f(x,y,z)$ è limite di una successione non decrescente di funzioni non negative $f_k(x,y,z)$ ciascuna delle quali è il massimo di un numero finito di funzioni del tipo*

$$a_0(x,y) + \sum_{h=1}^{n} a_h(x,y)z_h \qquad \textit{per quasi ogni} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$$

dove $a_0(x,y)$ e $a_h(x,y)$ misurabili in x per ogni y, continue in y per quasi ogni x , limitate e a supporto compatto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Tralasciamo, per brevità la dimostrazione di questo teorema.

§4 Teoremi di semicontinuità

I seguenti lemmi, che enunciamo senza dimostrazione, sono utili per dimostrare alcuni teoremi di semicontinuità.

Lemma 4.1 *Sia $h(x,y)$ una funzione reale di $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$, misurabile in x per ogni y, uniformemente continua in y per quasi ogni x. Allora, qualunque sia l'aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, per ogni $\delta > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso Ω_δ di Ω tale che $|\Omega - \Omega_\delta| < \delta$ e $h(x,y)$ è continua nel prodotto $\Omega_\delta \times \mathbb{R}$.*

Osservazione Poichè, come si è visto, una funzione $f(t,z)$ continua in t e convessa in z è continua nel complesso delle variabili, si ha che, se una funzione $g(x,y,z)$ è misurabile in x, uniformemente continua in y, convessa in z, allora, per il lemma 4.1, qualunque sia l'aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\delta > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso Ω_δ di Ω tale che $|\Omega - \Omega_\delta| < \delta$ e $g(x,y,z)$ è continua nel complesso delle variabili in $\Omega_\delta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Lemma 4.2 *Sia $h(x,y)$ una funzione reale di $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$, misurabile in x per ogni y, continua in y per quasi ogni x. Allora, per ogni funzione misurabile $w : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$, la funzione composta $h(x, w(x))$ è misurabile.*

Consideriamo ora funzionali del C.d.V. del tipo

$$F(u,v) = \int_\Omega f(x, u(x), v(x))\, dx \tag{4.1}$$

dove con Ω si è denotato un aperto di $\mathbb{R}^n$ e con $f = f(x,u,v)$ una funzione

$$\begin{array}{ll} (i) & \text{misurabile in } x, \text{ per ogni coppia } (u,v), \\ (ii) & \text{continua in } u \text{ e convessa in } v \text{ per quasi ogni } x. \end{array} \tag{4.2}$$

Supporremo pure, per semplicità, che l'integranda f sia non negativa. Denotiamo con $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni

$$w : x \in \Omega \rightarrow w(x) = (w_1(x), w_2(x), ..., w_n(x))$$

tali che $w_i(x) \in L^p(\Omega)$ per $i = 1, ...n$, munito della norma

$$\|w\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^p(\Omega)}.$$

Sussiste il seguente teorema

Teorema 4.3 *Il funzionale $F(u,v)$ definito in (4.1), per ogni fissata $u \in L^p(\Omega)$, è s.c.i. nella topologia debole di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ se e solo se è s.c.i. nella topologia forte di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Dim. Bisogna dimostrare solo che, se $F(u,\cdot)$ è s.c.i. nella topologia forte lo è pure nella debole, in quanto l'implicazione contraria è ovvia conseguenza delle definizioni. Osserviamo che $F(u,\cdot)$ è convesso perchè l'integranda $f(x,u,\cdot)$ è convessa . Inoltre, se $F(u,\cdot)$ è s.c.i. nella topologia forte, il suo epigrafico è fortemente chiuso. Dal lemma di Mazur (teorema 1.10 in appendice) si deduce che il suo epigrafico "e anche debolmente chiuso, quindi il funzionale dato è anche debolmente s.c.i.

Per le ipotesi fatte su f, dal teorema 2.8, $f(x,u,v)$ è continua nella coppia (u,v) per quasi ogni x e quindi, per il lemma 4.2, qualunque siano le funzioni misurabili $u : x \in \Omega \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ e $v :: x \in \Omega \rightarrow v(x) \in \mathbb{R}^n$, la funzione composta $f(x, u(x), v(x))$ è misurabile in Ω. Dunque ha senso considerare l'integrale (4.1) che può eventalmente essere uguale a $+\infty$. Inoltre la funzione f è limite di una successione non decrescente di funzioni non negative ciascuna delle quali è del tipo descritto nel teorema 3.6. Allora, per provare che l'integrale (4.1) è s.c.i. separatamente in u e v oppure nella coppia (u,v) rispetto a qualsivoglia topologia, basterà provare, per il lemma 1.3 che ciascuno degli integrali *approssimanti*

$$F_k(u,v) = \int_\Omega f_k(x,u(x),v(x))\,dx$$

ha la proprietà di semicontinuità richiesta. Pertanto, nei teoremi di semicontinuità che seguono, potremo assumere, in aggiunta alle (4.2), che la funzione integranda soddisfi le seguenti proprietà

$$\tag{4.3}\begin{cases} (i) & f(\cdot,\cdot,v) \text{ è a supporto compatto per ogni } v, \\ (ii) & \text{esiste una costante } L>0 \text{ tale che} \\ & |f(x,u,v)-f(x,u,v')| \le L|v-v'| \quad \text{per ogni } v,v' \in \mathbb{R}^n, \\ (iii) & \text{esiste una costante } M>0 \text{ tale che} \\ & |f(x,u,v)| \le M(1+|v|) \quad \text{per } v \in \mathbb{R}^n \\ & \text{ e per quasi tutti gli } x \text{ e per ogni } u. \end{cases}$$

Si verifica infatti che le approssimanti f_k della f soddisfano le (4.3).

Teorema 4.4 *Fissata $u \in L^p(\Omega), p \ge 1$, nelle ipotesi (4.2), il funzionale $F(u,\cdot)$, definito in (4.1), è s.c.i. nella topologia debole di $L^q(\Omega,\mathbb{R}^n), q \ge 1$.*

Dim. Sia $p \ge 1$ e sia $u \in L^p(\Omega)$ fissata. Il funzionale $F(u,v)$ è convesso in $v \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$ quindi, per il teorema 4.3, basta provare che è continuo nella norma di $L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Abbiamo già osservato che si può supporre che siano verificate le (4.3) e quindi che $f(x,u,v)$ sia nulla fuori di un aperto limitato $\Omega' \subset \Omega$ ed equiuniformemente lipschitziana in $v \in \mathbb{R}^n$ al variare di (x,u). Allora, fissata u, si ha

$$|F(u,v')-F(u,v'')| \le \int_{\Omega'} |f(x,u,v')-f(x,u,v'')|\,dx \le L\int_{\Omega'} |v'-v''|dx$$

per ogni $v',v'' \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$|F(u,v')-F(u,v'')| \le L|\Omega'|^{1/q'}\|v'-v''\|_{L^q}.$$

Si conclude che, per ogni u fissata, $F(u,v)$ è equiuniformemente lipschitziana in $L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.5 *Siano verificate le (4.2). Se $p \ge 1$ e $q > 1$, il funzionale $F(\cdot,v)$ definito in (4.1), al variare di v in ogni limitato di $L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$, è equicontinuo nella topologia forte di $L^p(\Omega)$.*

Dim. Proviamo dapprima la tesi nel caso in cui v vari in un limitato di $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
Sia $B := \{v \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) : \|v\|_\infty \le s\}$ con $s > 0$ fissato.
Sia $S := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < s\}$. Dalle (4.3) f è nulla fuori di un aperto limitato $\Omega' \subset \Omega$ e si ha

$$|f(x, u, v)| \le M(1 + s)$$

per quasi ogni $x \in \Omega'$, e per $(u, v) \in \mathbb{R} \times S$. Per $\epsilon > 0$, sia $\delta < \frac{\epsilon}{2M(1+s)}$. Per il lemma 4.1 esiste un chiuso $\Omega'_\delta \subset \Omega'$ con $|\Omega' - \Omega'_\delta| < \delta$ tale che $f(x, u, v)$ è continua nel prodotto $\Omega'_\delta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e quindi, poichè f è a supporto compatto in (x, u), è uniformemente continua in $\Omega'_\delta \times \mathbb{R} \times S$. Esiste dunque $\eta > 0$ tale che

$$|f(x, u', v) - f(x, u'', v)| < \epsilon/|\Omega'|$$

per $|u' - u''| < \eta$, per quasi tutti gli $x \in \Omega'$ e per ogni $v \in S$. Sia ora $\{u_n\}$ una successione tale che $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$, allora $\{u_n\}$ converge in misura, cioè in corrispondenza a δ e $\eta > 0$ esiste un indice n_0 tale che, denotato con

$$\mathcal{A}_n := \{x \in \Omega'_\delta : |u_n(x) - u(x)| > \eta\},$$

si ha

$$|\mathcal{A}_n| < \delta \quad \forall n > n_0.$$

Osserviamo che l'indice n_0 dipende solo dall'ϵ fissato in partenza attraverso δ e η.
Allora, per ogni $v \in B$, risulta

$$\begin{aligned}|F(u_n, v) - F(u, v)| \le &\int_{\Omega' - \Omega'_\delta} |f(x, u_n, v) - f(x, u, v)|dx \\ &+ \int_{\Omega'_\delta - \mathcal{A}_n} |f(x, u_n, v) - f(x, u, v)|dx + \int_{\mathcal{A}_n} |f(x, u_n, v) - f(x, u, v)|dx\end{aligned}$$

e, per $n > n_0$, pure

$$\int_{\Omega' - \Omega'_\delta} |f(x, u_n, v) - f(x, u, v)|dx \le 2M(1 + s)|\Omega' - \Omega'_\delta| < 2M(1 + s)\delta < \epsilon,$$

$$\int_{\Omega'_\delta - \mathcal{A}_n} |f(x, u_n, v) - f(x, u, v)|dx \le |\Omega'_\delta - \mathcal{A}_n| \frac{\epsilon}{|\Omega'|} < \epsilon,$$

$$\int_{\mathcal{A}_n} |f(x, u_n, v) - f(x, u, v)|dx \le 2M(1 + s)\delta < \epsilon.$$

In definitiva, qualunque sia $v \in B$, si ha

$$|F(u_n, v) - F(u, v)| \le 3\epsilon \qquad \forall n > n_0,$$

quindi si è provato finora che

(T_1) il funzionale $F(u,v)$ è equicontinuo rispetto alla variabile u nella topologia forte di $L^p(\Omega)$ al variare di v in ogni limitato di $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Proviamo ora che

(T_2) Sia B un sottoinsieme limitato di $L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $q>1$. Per ogni $r>0$ sia

$$B_r := \{w \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n) : \|w\|_\infty \le k(Lkr)^{q'/q}\}$$

dove L è la costante che compare nella (ii) della (4.3), $k>0$ è tale che $\|v\|_q < k$ per ogni $v \in B$ e q' è l'esponente coniugato di $q : q' := \frac{q-1}{q}$. Allora, qualunque sia r e per ogni $v \in B$, esiste $v_r \in B_r$ tale che

$$|F(u,v) - F(u,v_r)| < 1/r \qquad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Infatti, sia $v \in B$, per $r>0$ poniamo

$$v_r(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se} \quad |v(x)| \le k(Lkr)^{q'/q} \\ 0 & \text{se} \quad |v(x)| > k(Lkr)^{q'/q} \end{cases}$$

e

$$\Omega'_r := \{x \in \Omega' : |v(x)| > k(Lkr)^{q'/q}\}.$$

Per ogni $v \in B$ abbiamo

$$k^q \ge \|v\|_q^q \ge \int_{\Omega'_r} |v|^q \, dx \ge k^q (Lkr)^{q'} |\Omega'_r|$$

da cui segue

$$|\Omega'_r| \le 1/(Lkr)^{q'} \qquad \forall r > 0.$$

D'altra parte, dalla (ii) della (4.3), segue

$$\begin{aligned} |F(u,v) - F(u,v_r)| &\le L \int_{\Omega'} |v - v_r| dx = L \left(\int_{\Omega'_r} |v| \, dx + \int_{\Omega' - \Omega'_r} |v - v_r| \, dx \right) \\ &\le L |\Omega'_r|^{1/q'} \left(\int_{\Omega'_r} |v|^q \, dx \right)^{1/q} \le L \|v\|_q |\Omega'_r|^{1/q'}. \end{aligned}$$

In definitiva

$$|F(u,v) - F(u,v_r)| \le Lk|\Omega'_r|^{1/q'} \le Lk/(Lkr) = 1/r$$

qualunque sia $u \in L^p(\Omega)$. Resta provata in questo modo anche la (T_2).

La dimostrazione del teorema 4.5 si completa osservando che si può applicare il lemma 1.5, con $X \equiv L^p(\Omega)$ e $T_r \equiv B_r$, avendo provato T_1 e T_2.

Possiamo ora provare il principale teorema di semicontinuità di questo corso.

TEOREMA 4.6 *Nelle ipotesi (4.2), se $p \geq 1$ e $q > 1$ il funzionale $F(u,v)$ è s.c.i. in $L^p(\Omega) \times B$, con B arbitrario sottoinsieme limitato di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ per la topologia prodotto della topologia forte di $L^p(\Omega)$ e debole di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

DIM. Dal lemma 1.6, se si denota con X lo spazio $L^p(\Omega)$ con la topologia forte e con Y il sottoinsieme B di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con la topologia debole, utilizzando i teoremi 4.4 e 4.5, segue subito la tesi.

COROLLARIO 4.7 *Nelle ipotesi (4.2), $F(u,v)$ è sequenzialmente s.c.i. in $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega, \mathbb{R}^n), p \geq 1, q > 1$, per la topologia prodotto della forte $L^p(\Omega)$ per la debole $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

DIM. Basta osservare che ogni successione debolmente convergente in uno spazio di Banach è limitata in norma.

§5 Integrande di segno variabile

Finora abbiamo considerato funzioni integrande f non negative.

Vogliamo considerare ora il caso generale in cui f abbia segno variabile. Si può ancora ottenere la semicontinuità del funzionale $F(u,v)$ cercando uno spezzamento del tipo

$$\begin{aligned} F(u,v) = \int_\Omega f(x,u(x),v(x))\,dx &= \int_\Omega g(x,u(x),v(x))\,dx \\ &+ \int_\Omega [f_0(x,u) + \sum_{h=1}^n f_h(x,u)v_h]\,dx. \end{aligned}$$

in modo che la g sia non negativa e soddisfi le ipotesi del teorema 4.5 e quindi in modo che il primo addendo abbia la proprietà di semicontinuità descritta in quel teorema, mentre il secondo addendo, lineare in v, risulti continuo.

Cominciamo a dare alcune condizioni che garantiscano la continuità in $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega, \mathbb{R}^n), p \geq 1, q > 1$ del funzionale

$$F_0(u,v) = \int_\Omega [f_0(x,u) + \sum_{h=1}^n f_h(x,u)v_h]\,dx$$

e poi descriveremo come si possa effettuare uno spezzamento del tipo indicato.

Una condizione sufficiente perchè il termine $\int_\Omega f_0(x,u)\,dx$ risulti continuo in $L^p(\Omega)$ è la seguente

$$|f_0(x,u) - f_0(x,u')| \leq \psi(x)|u-u'|^\alpha \tag{5.1}$$

con $\psi(x)$ funzione tale che $\int_\Omega |\psi(x)|^\beta\, dx < +\infty$ e con $1/\beta + \alpha/p = 1$.

Infatti, applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\int_\Omega |f_0(x,u) - f_0(x,u')|\, dx \leq \|\psi\|_{L^\beta} \|u - u'\|^\alpha_{L^p},$$

da cui segue la continuità.

Osservazione La (5.1) è nota come *Hölderianità* della funzione f_0. In questo ordine di idee la (5.1) si può generalizzare scrivendo

$$|f_0(x,u) - f_0(x,u')| \leq \sum_{i=1}^N \psi_i(x)|u - u'|^{\alpha_i} \tag{5.2}$$

con le condizioni $\int_\Omega |\psi_i(x)|^{\beta_i}\, dx < +\infty$ e $1/\beta_i + \alpha_i/p = 1$.

Per quanto riguarda il termine $\int_\Omega f_h(x,u)v_h\, dx$, per la linearità in $v \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, ai fini della continuità, è indifferente considerare la topologia forte o la debole.

La continuità nel complesso delle variabili si ottiene imponendo separatamente la continuità in v e in u, quest'ultima uniformemente al variare di v in un insieme limitato di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Per avere la continuità in v, basta supporre che la funzione composta $f_h(x, u(x))$ appartenga a $L^{q'}(\Omega)$, $1/q' + 1/q = 1$, per ogni fissata $u \in L^p(\Omega)$. La continuità in u, al variare di v in un limitato B di $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, si può ottenere imponendo che sia

$$|f_h(x,u) - f_h(x,u')| \leq \varphi(x)|u - u'|^{\alpha'}$$

con $\varphi(x)$ funzione tale che $\int_\Omega |\varphi(x)|^{\beta'}\, dx < +\infty$ e con $1/\beta' + \alpha'/p + 1/q = 1$. Vediamo ora come si effettua lo spezzamento dell'integranda. Possiamo procedere in due modi per staccare da f una parte $g(x,u,v)$ non negativa e convessa in v ed una parte lineare $f_0(x,u) + \sum_{h=1}^n f_h(x,u)v_h$. In entrambi i casi si sfruttano le proprietà geometriche di f, pensata come superficie in v.

Una prima possibilità si ha nel caso in cui f sia derivabile rispetto a v e sia dotata di derivate parziali continue. Si considerano delle funzioni $\gamma_h(x,u)$ misurabili in x e continue in u e si calcola il piano tangente alla $f(x,u,v)$, pensata come superficie in v, nel punto $\gamma_h(x,u)$. Cioè

$$\pi(x,u,v) = f(x,u,\gamma(x,u)) + \sum_h \left[\frac{\partial f}{\partial v_h}\right]_{v=\gamma(x,u)} (v_h - \gamma_h(x,u)).$$

Posto allora $f(x,u,v) = (f - \pi)(x,u,v) + \pi(x,u,v)$, per la convessità di f in v, risulta $g = f - \pi \geq 0$, essendo ovviamente g misurabile in x, continua in u e convessa in v.

Effettuato questo spezzamento si può controllare di volta in volta, a seconda del problema in esame, se le $\frac{\partial f}{\partial v_h}$ e le $\gamma_(x,u)$ sono tali da rendere continuo il funzionale $F_0(u,v) = \int_\Omega \pi(x,u(x),v(x))\,dx$, ad esempio soddisfacendo condizioni del tipo sopra descritto.

Una seconda possibilità, per avere lo spezzamento richiesto, si ha nel caso in cui f non sia derivabile rispetto a v. Per $\mu \in \mathcal{C}$, posto

$$\bar\pi(x,u,v) = (1+n)\int f(x,u,t)\mu(x,u,t)\,dt - \sum_h \int f(x,u,t)\frac{\partial\mu}{\partial t_h}(v_h - t_h)\,dt.$$

Osserviamo che $\bar\pi$ è una specie di media dei piani tangenti ad $f(x,u,v)$ pensata come superficie in v.

Si ha anche in questo caso $\bar g = f - \bar\pi \geq 0$ e $\bar g$ misurabile in x, continua in u e convessa in v.

Lo spezzamento in una parte non negativa e una parte lineare in v è del tutto spontaneo per le forme quadratiche del tipo:

$$F(u,v) = \int_\Omega [\sum_{h,k=1}^n a_{h,k}v_hv_k + \sum_{h=1}^n b_hv_hu + \sum_{h=1}^n c_hv_h + du^2 + eu]\,dx,$$

che, per $v = gradu$, danno luogo, attraverso l'equazione di Eulero, alle equazioni differenziali del secondo ordine di tipo variazionale.

Il funzionale $F(u,v)$ è convesso in v se risulta

$$\sum_{h,k} a_{h,k}\lambda_h\lambda_k \geq 0 \tag{5.3}$$

e questa proprietà, dal punto di vista delle equazioni differenziali, corrisponde a prendere in esame il caso ellittico o parabolico. Se è soddisfatta la (5.3), se inoltre i coefficienti $a_{h,k}, b_h, c_h, d$ ed e sono funzioni misurabili di x, tali che b_h, d sono limitate in Ω e c ed e appartengono allo spazio $L^2(\Omega)$, allora $F(u,v)$ risulta s.c.i. nel prodotto $L^2(\Omega) \times B$ con B limitato in $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

§6 Semicontinuità ed esistenza di minimi di integrali multipli del C.d.V.

Procedendo in modo diverso da come si è fatto per provare il teorema 4.6 e il corollario 4.7, si può ottenere il seguente teorema

Teorema 6.1 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, sia $f(x,u,v)$ una funzione non negativa che verifica (4.2). Se la successione $\{(u_n,v_n)\}$ converge alla coppia (u,v) nello spazio prodotto $L^1_{\text{forte}}(\omega) \times L^1_{\text{debole}}(\omega,\mathbb{R}^n)$ per ogni $\omega \Subset \Omega$, allora*

$$F(u,v) \leq \liminf F(u_n,v_n)$$

e quindi F è sequenzialmente s.c.i.in $L^1_{\text{forte}}(\omega) \times L^1_{\text{debole}}(\omega,\mathbb{R}^n)$.

Non dimostriamo questo teorema. Ci limitiamo ad osservare che la tesi si può ottenere in spazi di funzioni più regolari ma questo non costituisce un vantaggio, rispetto al problema della ricerca dei minimi, perchè in tali spazi è difficile ottenere la compattezza delle successioni minimizzanti.

D'ora in avanti supporremo $v(x) = (v_1(x), v_2(x)..., v_n(x))$ dove, per ogni $h = 1, 2, ..., n$, $v_h(x) = \frac{\partial u}{\partial x_h}$ cioè v rappresenta il gradiente Du della u, e quindi faremo riferimento a funzionali integrali del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx \tag{6.1}$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 6.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, sia $f(x, u, v)$ una funzione non negativa che verifica (4.2). Allora il funzionale (6.1) è sequenzialmente s.c.i. rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\quad 1 \leq p < +\infty$.*

Dim. Se $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, per il teorema di Rellich, $u_n \to u$ nella norma di $L^p(\omega)$ per ogni $\omega \Subset \Omega$, dunque la coppia (u_n, Du_n) converge a (u, Du) in $L^p_{\text{forte}}(\omega) \times L^p_{\text{debole}}(\omega, \mathbb{R}^n)$ e la tesi segue dal teorema 6.1.

Osservazione L'uso del teorema di Rellich richiede che l'aperto Ω sia limitato e abbia una frontiera abbastanza regolare, per questo motivo si è fatta l'ipotesi di convergenza su aperti con chiusura compatta contenuti in Ω, infatti tali aperti si possono prendere a frontiera regolare quanto si vuole. È ovvio che se l'aperto Ω è limitato ed ha frontiera regolare, il teorema 6.2 vale con $\omega \equiv \Omega$.

Vogliamo ora utilizzare i teoremi di semicontinuità ottenuti per ottenere teoremi di esistenza delle soluzioni di certi problemi di minimo per funzionali rappresentati da integrali multipli. Abbiamo visto che la convessità dell'integranda è strettamente legata alla s.c.i. del funzionale. Questo non basta per avere esistenza dei minimi. A questo scopo occorre richiedere su f qualche andamento all'∞ In generale si assume che

$$f(x, u, v) \geq \nu |v|^p \qquad \text{con} \quad p > 1,\ \nu > 0. \tag{6.2}$$

Inoltre, poichè si ricerca il minimo del funzionale (6.1) fra tutte le funzioni che assumono certi valori al bordo $\partial\Omega$, di Ω, bisogna dare un senso all'espressione *valore al bordo di una funzione di classe* $W^{1,p}(\Omega)$. Questo è un problema, in certi casi molto difficile, che è stato studiato da molti e che ha portato all'introduzione degli spazi di Sobolev ad esponente frazionario. Noi ci occuperemo di una situazione molto semplice. In primo luogo supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$ sia un aperto limitato con frontiera molto regolare, ad esempio di classe $\mathcal{C}^1$, allora si dimostra che, se $p > n$, le funzioni dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, sono continue fino al bordo $\partial\Omega$ di Ω, quindi la restrizione di tale funzione a $\partial\Omega$ è ben definita. Più in generale vale il seguente teorema che enunciamo senza dimostrare.

TEOREMA 6.3 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un aperto limitato e sia $\partial\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$. Allora esiste un operatore lineare limitato*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tale che

(*i*)

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \quad se \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$$

(*ii*)

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con la costante C dipendente solo da p ed Ω.

DEFINIZIONE 6.1 *Diremo che Tu è la traccia di u su $\partial\Omega$.*

OSSERVAZIONE La stima (*ii*) si prova dapprima per funzioni $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ per le quali, come si è detto prima, $Tu := u|_{\partial\Omega}$, poi si osserva che ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si può approssimare con una successione di funzioni $u_n \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ che converge ad u nella norma di $W^{1,p}$. Per le u_n vale la (*ii*) e quindi

$$\|Tu_n - Tu_m\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{6.3}$$

perchè T è un operatore lineare. Ne segue che la successione $\{Tu_n\}$ è di Cauchy in $L^p(\partial\Omega)$. Definiamo $Tu := \lim_n Tu_n$ il limite preso in $L^p(\partial\Omega)$. In accordo con la (6.3) questo limite non dipende dalla particolare successione $\{u_n\}$ utilizzata per approssimare u, ma solo dalla stessa u.

Quando si voglia evitare il problema delle tracce, si considera una funzione $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ e lo spazio $\varphi + W_0^{1,p}(\Omega)$ di tutte le funzioni che sono del tipo $\varphi + u$ con $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

A questo punto possiamo dimostrare il seguente teorema di esistenza

TEOREMA 6.4 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un aperto limitato con frontiera regolare. Sia $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, e sia $f(x,u,v)$ una funzione che verifica (4.2), (6.2) e tale che*

$$f(x,u,v) \leq c(1 + |v|^p), \tag{6.4}$$

dove c è una costante positiva. Allora il problema di minimo per il funzionale (6.1) nella classe $\varphi + W_0^{1,p}(\Omega)$ ammette almeno una soluzione.

Dim. Osserviamo subito che, dalla (6.4) e dall'ipotesi che φ appartiene allo spazio $W^{1,p}(\Omega)$, segue

$$F(\varphi) = \int_\Omega f(x, \varphi(x), D\varphi(x))\, dx \leq c \left(\int_\Omega (1 + |D\varphi(x)|^p)\, dx \right) < +\infty.$$

Quindi ha senso considerare il problema di minimo perchè il funzionale non è identicamente $+\infty$ e, per la (6.2), esso è anche non negativo. Posto $\lambda := \inf\{F(u) : u \in \varphi + W_0^{1,p}(\Omega)\}$, sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante, cioè tale che $F(u_n) \longrightarrow \lambda$. Dalla (6.2) si ricava

$$\nu \int_\Omega |Du_n|^p\, dx \leq F(u_n) \leq \lambda + 1.$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza di Poincarè, si ha

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_n|^p\, dx &\leq c_1 \left[\int_\Omega |u_n - \varphi|^p\, dx + \int_\Omega |\varphi|^p\, dx \right] \\ &\leq c_2 \left[\int_\Omega |Du_n|^p\, dx + \int_\Omega |D\varphi|^p\, dx + \int_\Omega |\varphi|^p\, dx \right], \end{aligned}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti positive indipendenti da u_n.

Dalle ultime due disuguaglianze segue che

$$\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c_3,$$

e quindi, poichè l'ipotesi $p > 1$ comporta che lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo, è possibile estrarre da $\{u_n\}$ una successione, che per semplicità denotiamo allo stesso modo, tale che

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{in} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Dal teorema 6.2 e dalla successiva osservazione si ha che

$$F(\bar{u}) \leq \liminf F(u_n) = \lambda$$

e quindi $\bar{u}$ realizza il minimo del funzionale.

Osservazione Nel precedente teorema l'ipotesi $p > 1$ è cruciale. Il caso $p = 1$ richiede altri strumenti.

APPENDICE

ELEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE

§1 Spazi di Banach

Uno spazio vettoriale $\mathcal{B}$ sul campo reale $\mathbb{R}$ si dice normato, se ad ogni elemento $x \in \mathcal{B}$ si può associare un numero reale non negativo $\|x\|$, che si chiama norma di x, tale che

$$(i) \qquad \|x\| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0$$

$$(ii) \qquad \|\alpha\, x\| \;=\; |\alpha|\, \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{B},$$

$$(iii) \qquad \|x + y\| \leq \; \|x\| \,+\, \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{B}.$$

Quando, per una migliore comprensione del testo, siamo costretti ad esplicitare che la norma si riferisce ad uno spazio di Banach $\mathcal{B}$, scriviamo $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

La norma induce una distanza ponendo $d(x, y) \;=\; \|x - y\|$ e questo ci consente di definire gli intorni di un elemento dello spazio $\mathcal{B}$.

Definizione 1.1 *Diremo che $\mathcal{B}$ è uno spazio di Banach se è uno spazio vettoriale munito di una norma e completo rispetto alla topologia indotta dalla norma.*

Con $\mathcal{C}([a, b])$ e con $\mathcal{C}^1([a, b])$ denoteremo rispettivamente lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ e il suo sottospazio i cui elementi sono funzioni dotate di derivata prima continua su $[a, b]$, mentre con $\mathcal{C}_0(a, b)$ e $\mathcal{C}_0^1(a, b)$ denoteremo i loro sottoinsiemi i cui elementi sono funzioni a supporto compatto contenuto in (a, b).

$\mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{C}^1([a, b])$ sono spazi vettoriali e diventano spazi normati e completi e quindi spazi di Banach con l'introduzione delle seguenti norme:

$$(i) \qquad \|y\|_0 \;=\; \max_{[a,b]} |y(x)|$$

$$(ii) \qquad \|y\|_1 \;=\; \max_{[a,b]} |y(x)| \,+\, \max_{[a,b]} |y'(x)|$$

Osserviamo che, se in un punto $x \in [a, b]$ due funzioni sono abbastanza vicine, non è detto che anche le loro derivate nello stesso punto siano vicine e viceversa. Osserviamo pure che se $\|y - \bar{y}\|_1 < \epsilon$, necessariamente $\|y - \bar{y}\|_0 < \epsilon$.

Il seguente teorema di compattezza in $\mathcal{C}([a, b])$, dovuto ad Ascoli-Arzelà, è di uso frequente.

Teorema 1.1 *Da ogni successione equicontinua ed equilimitata di funzioni continue è possibile estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente.*

Osserviamo che la funzione limite a cui si fa riferimento nel precedente teorema é continua perché ogni successione di funzioni continue che converge uniformemente ha per limite una funzione continua.

Chiameremo funzionale su uno spazio vettoriale $\mathcal{B}$ ogni applicazione a valori reali definita su $\mathcal{B}$. Un funzionale F si dice lineare se verifica la relazione:

$$F(ax+by) \,=\, aF(x)+bF(y) \qquad \forall x,y \in \mathcal{B} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Un funzionale F si dice limitato se esiste una costante $C \geq 0$ tale che

$$|F(x)| \leq C\,\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{B}.$$

Osserviamo che un funzionale lineare è continuo se e soltanto se è limitato.

Il seguente risultato è fondamentale in molte applicazioni:

TEOREMA 1.2 (HAHN-BANACH) *Dato un sottospazio vettoriale $\mathcal{V}$ di uno spazio normato $\mathcal{B}$, e un funzionale lineare e limitato F definito su $\mathcal{V}$, esiste un prolungamento $\tilde{F}$ di F su tutto lo spazio $\mathcal{B}$ che conserva la norma.*

Si chiama *iperpiano* un insieme H definito da

$$H := \{x \in \mathcal{B} : f(x) = \alpha\}$$

dove f è un funzionale lineare su $\mathcal{B}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo che, se f è continuo, l'iperpiano è chiuso. L'equazione $f(x) \geq \alpha$ individua un semispazio. Inoltre si dice che l'iperpiano H separa (risp. separa strettamente) due sottoinsiemi A e B di $\mathcal{B}$ se $f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha$ per ogni $x \in B$ (risp.,se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x) \leq \alpha - \epsilon$ per ogni $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \epsilon$ per ogni $x \in B$.)

TEOREMA 1.2'(VERSIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI HAHN-BANACH) *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e siano A e B suoi sottoinsiemi non vuoti, disgiunti e convessi. Allora, se A è aperto, esiste un iperpiano chiuso che separa A e B; se A è chiuso e B è compatto, esiste un iperpiano chiuso che separa strettamente A e B. Infine ogni insieme chiuso e convesso è intersezione di tutti i semispazi chiusi che lo contengono.*

DEFINIZIONE 1.2 *Dato uno spazio di Banach $\mathcal{B}$, denoteremo con $\mathcal{B}'$ il suo duale, cioè lo spazio di tutti i funzionali lineari e continui su $\mathcal{B}$.*

Si vede facilmente che $\mathcal{B}'$ è uno spazio vettoriale con le ordinarie operazioni di somma e di prodotto per uno scalare e che in $\mathcal{B}'$ la posizione

$$\|F\|_{\mathcal{B}'} \;=\; \sup_{x \in \mathcal{B}-\{0\}} \frac{|F(x)|}{\|x\|_{\mathcal{B}}}$$

definisce una norma rispetto alla quale, poichè $\mathbb{R}$ è uno spazio completo, $\mathcal{B}'$ è uno spazio di Banach.

Definizione 1.3 *Diremo che uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ è riflessivo se risulta* $\mathcal{B} = (\mathcal{B}')'$.

Definizione 1.4 *Diremo che uno spazio di Banach è separabile se contiene un sottoinsieme denso numerabile.*

Nel seguito denoteremo con Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Sono esempi di spazi di Banach gli spazi $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, delle funzioni di potenza p-esima sommabile secondo Lebesgue su Ω, muniti della norma:

$$\|u(x)\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Se $1 < p < \infty$ si chiama esponente coniugato di p il numero $p' = p/p-1$. Nel caso $p = 1$ l'esponente coniugato di p è $p' = +\infty$.

Diamo, senza dimostrazione, alcuni teoremi che sono spesso utilizzati.

Teorema 1.3 *Se $1 \leq p < \infty$, allora $L^p(\Omega)$ è uno spazio separabile.*

Teorema 1.4 *Per ogni $1 \leq p < \infty$, lo spazio duale $(L^p)'(\Omega)$ di $(L^p(\Omega))$ è lo spazio* $L^{p'}(\Omega)$.

Teorema 1.5 *Lo spazio $L^p(\Omega)$ è riflessivo se e solo se $1 < p < \infty$.*

Consideriamo sullo spazio di Banach $\mathcal{B}$ due topologie che ci consentiranno di parlare di convergenza forte e di convergenza debole, più precisamente diamo le definizioni seguenti.

Definizione 1.5 *Diremo che una successione $\{x_n\} \subset \mathcal{B}$ converge fortemente ad $x \in \mathcal{B}$ se* $\lim_n \|x_n - x\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Definizione 1.6 *Diremo che una successione $\{x_n\} \subset \mathcal{B}$ converge debolmente ad $x \in \mathcal{B}$ se, per ogni $F \in \mathcal{B}'$, risulta* $\lim_n F(x_n) = F(x)$.

È facile provare che ogni successione di elementi di $\mathcal{B}$ che converge fortemente, converge pure debolmente. Dimostriamo ora il seguente teorema.

Teorema 1.6 *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach separabile. Se $\{F_k\}$ é una successione di elementi di $\mathcal{B}'$ limitata in norma. Allora esistono una successione estratta $\{F_{s_k}\}$ e un funzionale $F \in \mathcal{B}'$ tali che per ogni $x \in \mathcal{B}$ risulta $F_{s_k}(x) \to F(x)$.*

Dim. Sia $\{F_k\} \subset \mathcal{B}'$ una successione limitata in norma, cioè

$$\|F_k\|_{\mathcal{B}'} \leq M. \tag{1.1}$$

Vogliamo provare che esiste una successione estratta $\{F_{s_k}\}$ e un funzionale $F \in \mathcal{B}'$ tali che, per ogni $x \in \mathcal{B}$ risulta $F_{s_k}(x) \rightarrow F(x)$. Consideriamo una successione $\{x_n\} \subset \mathcal{B}$ e densa in $\mathcal{B}$, esistente per l'ipotesi di separabilità. Per ogni fissato m la successione numerica $\{F_k(x_m)\}$ è limitata, quindi si può estrarre da essa una successione convergente che indichiamo con $\{F_{n_k}(x_m)\}$. Si può costruire il seguente quadro

$$\begin{array}{cccc} F_{n_1}(x) & \cdots & F_{n_k}(x) & \cdots \\ F_{\ell_1}(x) & \cdots & F_{\ell_k}(x) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

le cui successioni godono delle proprietà seguenti:

(*i*) la prima successione converge in x_1, la seconda in x_1 e $x_2, ...$, la n-esima in $x_1, x_2, ...x_n$;

(*ii*) ogni successione è estratta dalla precedente.

Applicando il procedimento diagonale di Cantor otteniamo una successione $F_{n_1}, F_{l_2}, ..., F_{m_k}, ...$ che indicheremo con $\{F_{s_k}\}$. È ovvio che per ogni intero n tale successione, a prescindere dai primi $n-1$ termini, è estratta dalla n-esima successione del quadro e quindi converge in tutti i punti x_k; in breve per ogni n esiste finito il limite $\lim_k F_{s_k}(x_n)$. Proviamo ora che per ogni $x \in \mathcal{B}$ la successione numerica $\{F_{s_k}(x)\}$ converge. Infatti, tenendo conto della (1.1), con n arbitrario si ha:

$$\begin{aligned} |F_{s_k}(x) - F_{s_{k+p}}(x)| &\leq |F_{s_k}(x) - F_{s_k}(x_n)| + |F_{s_k}(x_n) - F_{s_{k+p}}(x_n)| \\ &\quad + |F_{s_{k+p}}(x_n) - F_{s_{k+p}}(x)| \\ &\leq 2M \|x - x_n\|_{\mathcal{B}} + |F_{s_k}(x_n) - F_{s_{k+p}}(x_n)|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Scegliendo n in modo che $2M \|x - x_n\|_{\mathcal{B}} < \epsilon/2$ e, determinato in relazione ad ϵ un indice ν tale che per $s_k > \nu$ risulti

$$|F_{s_k}(x_n) - F_{s_{k+p}}(x_n)| < \epsilon/2,$$

dalla (1.2) si deduce che la successione $\{F_{s_k}(x)\}$ è di Cauchy e quindi converge. Si conclude osservando che l'applicazione $F : x \longrightarrow \lim_k F_{s_k}(x)$ è un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{B}$.

Corollario 1.7 *Ogni successione limitata in L^p, se $1 < p < \infty$, ammette una sottosuccessione debolmente convergente L^p.*

Dim. Infatti, per $1 < p < \infty$ risulta $1 < p' < \infty$, allora applichiamo il teorema precedente prendendo come spazio $\mathcal{B}$ lo spazio $L^{p'}$ che è separabile e come spazio $\mathcal{B}'$ lo spazio $L^p = (L^{p'})'$.

Dei seguenti teoremi diamo solo l'enunciato.

Teorema 1.8 *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach riflessivo e sia $k > 0$ tale che*

$$\|u_n\| \leq k \quad \forall n,$$

allora esistono una $u_0 \in \mathcal{B}$ e una successione $\{u_{n_j}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tali che

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_o \quad in \quad \mathcal{B}.$$

Teorema 1.9 *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $y_n \rightharpoonup y$ in $\mathcal{B}$. Allora esiste un $K > 0$ tale che per ogni n risulta $\|y_n\| \leq K$. Inoltre*

$$\|y\| \leq \liminf_n \|y_n\|.$$

Il seguente teorema è noto come *Lemma di Mazur.*

Teorema 1.10 *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia $y_n \rightharpoonup y$ in $\mathcal{B}$. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono un intero $n = n(\epsilon)$ e delle costanti $\alpha_i = \alpha_i(\epsilon) \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ per cui risulta*

$$\|y - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\| < \epsilon\,.$$

§2 Spazi di Sobolev

Definizione 2.1 *Denotiamo con $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni, a supporto compatto in (Ω) e ivi dotate di derivate di ogni ordine continue.*

Tali funzioni si chiamano "funzioni test".

Indicheremo con $\partial_i y(x)$ la derivata parziale prima di una funzione y rispetto alla variabile indipendente x_i.

Definizione 2.2 *Sia $y(x) \in L^1(\Omega)$. Se esiste una funzione $v_i(x) \in L^1(\Omega)$ che verifica*

$$\int_\Omega y(x)\partial_i\phi(x)\,dx = -\int_\Omega v_i(x)\phi(x)\,dx$$

per ogni funzione test ϕ, allora si dice che $v_i(x)$ è la derivata parziale debole di $y(x)$ rispetto alla variabile indipendente x_i.

È facile provare che la derivata debole di una funzione, se esiste, è unica. Per le funzioni dotate di derivata in senso classico, la derivata debole coincide con la derivata classica. Osserviamo che, a differenza delle derivate classiche, la cui definizione ha carattere puntuale, la definizione di derivata debole ha carattere locale. Per chi ha conoscenza delle derivate nel senso delle distribuzioni, le derivate deboli sono derivate di questo tipo. Nel caso di funzioni regolari, ad esempio di classe $\mathcal{C}^1$, la formula che definisce la derivata debole non è altro che una formula di integrazione per parti, se si tiene conto del fatto che le funzioni test sono nulle al bordo di Ω; in questo caso le derivate deboli coincidono con le derivate classiche. In generale le derivate deboli esistono per funzioni meno regolari, per esempio per le funzioni assolutamente continue che sono quasi ovunque derivabili in senso classico.

DEFINIZIONE 2.3 *Denotiamo con $W^{1,p}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev delle funzioni $y(x) \in L^p(\Omega)$ che hanno derivate parziali deboli, che per semplicità denotiamo ancora con $\partial_i y(x)$,in $L^p(\Omega)$.*

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è completo rispetto alla norma;

$$\| y \|_{1,p} = \left(\| y \|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \| \partial_i y \|_p^p \right)^{1/p}$$

quindi è uno spazio di Banach.

Nel seguito denoteremo con $W_0^{1,p}(\Omega)$ la chiusura dello spazio $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono nulle al bordo di Ω.

DEFINIZIONE 2.4 *Diremo che una successione $\{y_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge in senso forte o in norma ad un elemento $y \in W^{1,p}(\Omega)$, se risulta*

$$\|y_n - y\|_{1,p} \longrightarrow 0.$$

DEFINIZIONE 2.5 *Diremo che una successione $\{y_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge in senso debole ad un elemento $y \in W^{1,p}(\Omega)$, se*

$$\int_\Omega (y_n(x) - y(x))\phi(x)\, dx \ \longrightarrow 0$$

e, per ogni $i \in \{1, ...n\}$,

$$\int_\Omega \partial_i (y_n(x) - y(x))\phi(x)\, dx \ \longrightarrow 0$$

per ogni funzione $\phi \in L^{p'}(\Omega)$, dove si è denotato con $p' = p/(p-1)$ l'esponente coniugato di p.

Teorema 2.1 *Ogni successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Dim. Sia $\{y_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una successione limitata in norma, cioè $\| y_n \|_{1,p} \leq M$. Ricordando la definizione della norma in $W^{1,p}(\Omega)$ e applicando il corollario 1.7 alla successione delle funzioni e alle successioni delle derivate parziali, si trova una sottosuccessione $\{y_{k_n}\}$ di $\{y_n\}$ che converge debolmente ad una funzione $y \in L^p$ tale che le successioni delle derivate parziali $\{\partial_i y_{k_n}\}$, per ogni $i = 1, ...n$, convergono debolmente in L^p a delle funzioni v_i. La conclusione si ottiene provando che, per ogni $i = 1, ...n$, risulta $\partial_i y = v_i$. Infatti per ogni funzione test ϕ si ha:

$$\int_\Omega v_i \phi \, dx = \lim_n \int_\Omega \partial_i y_{k_n} \phi \, dx = -\lim_n \int_\Omega y_{k_n} \partial_i \phi \, dx = -\int_\Omega y \partial_i \phi \, dx$$

e quindi la tesi segue dalla definizione di derivata debole.

Diamo ora i teoremi di immersione di Sobolev e di compattezza di Rellich in casi molto particolari.

Teorema 2.2 *(Teorema di immersione di Sobolev) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con frontiera regolare. Allora*

(*i*) *se $p > n$, ogni funzione dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è continua e limitata su Ω.*

(*ii*) *se $p = n$, ogni funzione dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ appartiene allo spazio $L^q(\Omega)$, $\quad 1 \leq q < \infty$.*

(*iii*) *se $1 \leq p < n$, ogni funzione dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ appartiene allo spazio $L^q(\Omega)$, $\quad 1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$.*

Teorema 2.3 *(Teorema di compattezza di Rellich) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera regolare. Allora*

(*i*) *se $p > n$, l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ è compatta;*

(*ii*) *se $p = n$, l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatta per ogni $1 \leq q < \infty$;*

(*iii*) *se $1 \leq p < n$, l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatta per ogni $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$.*

Osserviamo che il teorema di compattezza di Rellich implica che, se una successione converge debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq n$, allora converge fortemente in $L^q(\Omega)$ per ogni $q \geq 1$.

§3 Disuguaglianze

Disuguaglianza di Hölder:

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_\Omega f(x)^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega g(x)^{p'}\,dx\right)^{1/p'}$$

valida per ogni $f(x) \in L^p(\Omega)$ e per ogni $g(x) \in L^{p'}(\Omega)$.

Nel caso $p = p' = 2$ essa è nota come disuguaglianza di Schwartz.

Disuguaglianza di Jensen:

Sia $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ un aperto limitato. Sia Φ una funzione convessa. Vale la seguente disuguaglianza:

$$\Phi\left(\frac{1}{mis\,\Omega}\int_\Omega u(x)\,dx\right) \le \frac{1}{mis\,\Omega}\int_\Omega \Phi(u(x))\,dx$$

Disuguaglianza di Poincaré:

Sia Ω un aperto limitato con frontiera regolare e sia $1 \le p < \infty$. Allora esiste una costante $K > 0$ tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p} \le K\|gradu\|_{L^p}$$

Osserviamo che da questa disuguaglianza segue che lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach munito della norma

$$\|\, u \,\|_{W_0^{1,p}} = \left(\sum_{i=1}^n \|\, \partial_i y \,\|_{L^p}^p\right)^{1/p}.$$

§4 Alcuni teoremi della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue

Di frequente utilizzo sono il lemma di Fatou, il teorema della convergenza monotona di Beppo Levi e il teorema della convergenza dominata di Lebesgue che forniscono condizioni per il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 4.1 *(Lemma di Fatou) Sia $\{f_j\}$ una successione di funzioni definite in un sottoinsieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^n$, tali che per quasi ogni $x \in \Omega$ risulta*

$$f_j(x) \ge \phi(x)$$

dove $\phi(x)$ è una funzione sommabile secondo Lebesgue su Ω. Allora

$$\int_\Omega \liminf_j f_j(x)\,dx \le \liminf_j \int_\Omega f_j(x)\,dx.$$

TEOREMA 4.2 *(Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata) Sia $\phi(x)$ una funzione non negativa e sommabile su un sottoinsieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{f_j\}$ una successione di funzioni integrabili in Ω tali che le relazioni*

$$|f_j(x)| \leq \phi(x)$$

e

$$\lim_j f_j(x) = f(x)$$

valgono per quasi ogni $x \in \Omega$. Allora risulta

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_j \int_\Omega f_j(x)\,dx.$$

TEOREMA 4.3 *(Teorema di Beppo Levi della convergenza monotona) Sia $\{f_j\}$ una successione di funzioni integrabili in Ω tali che*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

e sia $f(x)$ il limite puntuale delle $f_j(x)$. Allora si ha

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_j \int_\Omega f_j(x)\,dx.$$