LA SERIE ARMONICA

La serie armonica
Si chiama *serie armonica* la serie di temine generale $x_n = 1/n$.
Teorema La serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

diverge positivamente.
Dimostrazione Infatti consideriamo per $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Allora $e \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ Poichè la funzione $\ln x$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$= 1 = \ln e = \ln a_k = k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

Da cui

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$$

Facendo le somme da 1 a n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$

In conclusione $s_n \geq \ln(n+1)$ e quindi la serie armonica diverge per i teoremi di confronto sulle successioni.

Importante notare che
Per la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è verificata la condizione $x_n \to 0$; questa condizione è perciò necessaria, ma non è sufficiente per la convergenza della serie.

Teorema (criterio del confronto asintotico) Sia x_n una successione a termini non negativi per cui esiste il limite e

$$\lim_{n \to +\infty} n x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Date: November 22, 2010.

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}\right] = e$$

ossia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \sim \frac{e}{n} \quad \text{per} \;\; n \to \infty,$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente

1. Serie Armonica Generalizzata

Per p numero reale e positivo. La serie armonica generalizzata è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

Teorema (criterio del confronto asintotico) Sia p un numero reale e positivo. Supponiamo $p \leq 1$. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite e

$$\lim_{n\to+\infty} n^p x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = e$$

ossia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{e}{\sqrt{n}} \quad \text{per} \ \ n \to \infty,$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente.

Teorema (criterio del confronto asintotico) Sia $p > 1$ un numero reale. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite in $\mathbb{R}$ di

$$\lim_{n\to+\infty} n^p x_n$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$$

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Pertanto

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \sim \frac{e}{n^2} \quad \text{per} \ \ n \to \infty,$$

ossia

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente. Ricapitolando

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Pertanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}} \sim \frac{e}{n^{2\alpha}} \quad \text{per } \ n\to\infty,$$

ossia

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2\alpha} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > \frac{1}{2}$ ($\iff$ $2\alpha > 1$) e divergente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.