ANALISI MATEMATICA I

Paola Loreti

Dipartimento di Scienze di Base, e Applicate per l'Ingegneria, Via Scarpa n.16, 00161 Roma, Italy

Indice

CAPITOLO 1

Continuazione

Vedere note precedenti. Questa parte della dispense è solo esposta in traccia. Si richiede integrazione delle dimostrazioni e degli argomenti mancanti.

DA COMPLETARE

CAPITOLO 2

Integrale

1. Calcolo dell'area e Definizione di integrale

Calcoliamo l'area A del segmento di parabola

$$f(x) = x^2 \qquad a \le x \le b.$$

In primo luogo opereriamo una suddivisione dell' intervallo $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots x_N = b,$$

con punti equidistanti. Il generico punto x_n sarà dato da

$$x_n = a + \frac{b-a}{N} n$$

Calcoliamo un'approssimazione per eccesso dell'area A.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} M_n (x_n - x_{n-1}), \qquad M_n = f(x_n) = \sup_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)$$

Poichè

$$M_n = x_n^2 = \left(a + \frac{(b-a)n}{N}\right)^2,$$

si ottiene

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(a + \frac{(b-a)n}{N}\right)^2 \frac{(b-a)}{N},$$

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(a^2 + 2a\frac{(b-a)n}{N} + \left(\frac{(b-a)n}{N}\right)^2\right),$$

Sviluppando i quadrati

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \left(a^2 N + 2a\frac{(b-a)}{N} \sum_{n=1}^{N} n + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^2 \sum_{n=1}^{N} n^2\right)$$

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \left(a^2 N + 2a\frac{(b-a)^2}{N}\frac{N(N+1)}{2} + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) =$$

$$S_N = (b-a)a^2 \frac{N}{N} + a\frac{(b-a)^2 N(N+1)}{N^2} + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^3 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Per $N \to +\infty$,

$$S(x) \to (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} =$$

$$a^2 b - a^3 + ab^2 + a^3 - 2a^2 b + \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + a^2 b - ab^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Sviluppare per esercizio l'approssimazione per difetto, tenendo conto che

$m_n = f(x_{n-1}) = \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)$ dimostrare che per $N \to +\infty$, vale

$$s_N \to \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

In forza di

$$s_N \leq A \leq S_N,$$

per $n \to +\infty$ si ottiene

$$A = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

La partizione che abbiamo scelto dell'intervallo $[a, b]$ è fornita da un insieme di $N + 1$ punti equispaziati la cui unione disgiunta fornisce $[a, b]$, e l'ampiezza dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i)$ è $\frac{b-a}{N}$. In realtà possiamo pensare partizioni dell'intervallo più generali, osserviamo che non è detto che cambiando partizione e aumentando i punti otteniamo un' approssimazione migliore. Ad esempio nel caso in cui i punti in più vengono aggiunti in una zona dove la funzione è piatta: non aggiungiamo termini che danno luogo a una migliore approssimazione. Mentre se ad una stessa partizione aumentiamo il numero dei punti, l'approssimazione che ne risulta sarà migliore o uguale della precedente. In generale data una partizione dell'intervallo $[a, b]$ ossia un insieme di $N + 1$ punti

$$x_0 < x_1 < \dots x_N,$$

che danno luogo a N intervalli $[x_{i-1}, x_i)$ la cui unione fornisce l'intervallo $[a, b]$. Assumiamo ora che la funzione sia limitata in $[a, b]$, e calcoliamo le somme inferiori e superiori su partizioni diverse. Per confrontare due qualsiasi partizioni si usa l'unione delle due partizioni che diventa confrontabile con le partizioni di cui è l'unione nel senso che contiene gli stessi punti di ciascuna partizione.
Valgono le seguenti proprietà: Se A e B sono due intervalli vale

- $$\inf_A f(x) \geq \inf_B f(x), \qquad \text{se } A \subset B$$
- $$\sup_A f(x) \leq \sup_B f(x), \qquad \text{se } A \subset B$$

Lemma 1.1. *Si considerino due partizioni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e la loro unione $\mathcal{P}_3$. Allora*

$$s(\mathcal{P}_1) \leq s(\mathcal{P}_3) \leq S(\mathcal{P}_3) \leq S(\mathcal{P}_2)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$. Allora confrontiamo le partizioni $\mathcal{P}_1 = \{x_1, ..., x_N\}$ e $\mathcal{P}_3$. La partizione $\mathcal{P}_3$ conterrà almeno un punto in più (in caso di pi'u punti il ragionamento si itera il ragionamento): ζ e $\zeta \in (x_{k-1}, x_k)$, per qualche k. Allora

$$s(P_1) = \sum_{n=1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{n=k+1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(z - x_{k-1}) + \inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - z) + \sum_{n=k+1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) =$$

In forza di

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{(x_{k-1},z)} f(x)(z - x_{k-1})$$

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{(z,x_k)} f(x)(x_k - z).$$

Quindi

$$s(P_1) \leq \sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1},z)} f(x)(z - x_{k-1}) + + \sum_{n=k+1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) = s(\mathcal{P}_3)$$

Quindi

$$s(P_1) \leq s(\mathcal{P}_3).$$

Dimostrare per esercizio la rimanente parte. □

Si dimostra che data una funzione limitata in un intervallo, e date due partizioni qualunque $\mathcal{P}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{x_1, \dots, x_M\}$ le somme inferiori sono minori o uguali delle somme superiori, ossia

Teorema 1.2.

$$s = \sum_{n=1}^{N} \inf_{(\xi_{n-1},\xi_n)} f(\xi)(\xi_n - \xi_{n-1}) \leq \sum_{n=1}^{M} \sup_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_n - x_{n-1}) = S$$

La dimostrazione del teorema è conseguenza del lemma.
Se $\sup s = \inf S$, al variare comunque della partizione, si definisce integrale di Riemann di una funzione limitata in un intervallo tale valore e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx = \sup s = \inf S.$$

Non tutte le funzioni limitate in un intervallo sono integrabili secondo Riemann. Ad esempio, la funzione di Dirichlet non è integrale secondo Riemann in $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sfruttando la densit'a di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, si verifica che $s(x) = 0$ per ogni partizione e $S(x) = 1$ per ogni partizione.

2. Proprietà dell'integrale

In ipotesi di integrabilià delle funzioni f e g negli intervallo $[a, b]$, valgono le seguenti proprietà

(1)
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(2)
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(3)
$$\int_a^b c_1 f(x) + c_2 g(x)dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

(4)
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(5) L'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale 0
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

(6) L'integrale di una funzione pari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Una classe di funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo $[a, b]$ è la classe delle funzioni continue in $[a, b]$.

2.1. Calcolo di Area. Se
$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$
allora
$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$
rappresenta l'area compresa tra i grafici delle due funzioni per $a \leq x \leq b$.

3. Primitive

Definizione 3.1. *Una funzione F è una primitativa di una funzione f continua in $[a, b]$ se F è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.*

La caratterizzazione delle funzioni primitive assume allora un ruolo fondamentale. Data una funzione primitiva di f ne esistono altre che non siano un'addizione di F con una qualisiasi constante? Osserviamo che mentre dire che se F è primitiva di f, allora $F + c$ è ancora primitiva è una conseguenza banale del fatto che la derivata di una constante è zero, non è cos`ì diretto affermare che tutte le funzioni primitive sono fatte in tal modo.

Teorema 3.2. *Se F e G sono due primitive di f in $[a, b]$ allora $F = G + c$.*

La dimostrazione si basa su una conseguenza del teorema di Lagrange

TEOREMA 3.3. *Se f ha derivata nulla in (a, b) allora f è una costante.*

Assumendo vero questo teorema si ottiene la dimostrazione del teorema

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

allora

$$(F - G)(x) = c$$

e

$$F = G + c$$

.

Per le funzioni in continue in $[a, b]$ vale il teorema della media integrale.

TEOREMA 3.4. *Sia f continua in $[a, b]$. Allora esiste x_0 in $[a, b]$ tale che*

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle stime sulle somme inferiori e superiori si ha la stima

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a),$$

dove

$$m = \min_{[a,b]} f(x) \qquad M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Qiondi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

è un valore compreso, tra il minimo e il massimo. Il risultato segue allora dal teorema dei valori intermedi per funzioni f continue in $[a, b]$. □

Vale il teorema fondamentale del calcolo integrale

TEOREMA 3.5. *Sia f continua in $[a, b]$. Indichiamo con*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

allora F è una primitiva della funzione f.

DIMOSTRAZIONE. Si considera il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^{x+h} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right] =$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x(h)),$$

per il teorema della media integrale. Vale

$$\lim_{h\to 0} x(h) = x, \qquad \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(\lim_{h\to 0} x(h)) = f(x)$$

Quindi esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

e vale $f(x)$. □

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue la formula fondamentale del calcolo integrale (il problema dell'integrazione è ricondotto al calcolo di funzioni primitive).

TEOREMA 3.6.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)dt,$$

sostituendo $x = a$

$$F(a) = c,$$

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)dt,$$

ossia

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt,$$

□

3.1. Integrale Indefinito. Si può associare alla funzione$f$ l'insieme delle sue primitive, ossia l' integrale indefinito. Si indica con il simbolo

$$\int f(x)dx + c,$$

ove c è una costante arbitraria. L' integrale indefinito è, al variare della costante c in $\mathbb{R}$ una famiglia di funzioni.

4. Integrazione per sostituzione

Supponiamo che f sia una funzione integrabile, e $\phi(t)$ una funzione derivabile definita sull'intervallo $[a, b]$ con

$$\phi[a, b] \subset \mathrm{dom} f.$$

Si ha

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

5. Integrazione per parti

Supponiamo che f, g funzioni derivabili,

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int \frac{d}{dx} f(x)g(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

ESERCIZIO 5.1. *Scrivere la formula di integrazione per parti nel caso di integrale definito.*

6. Esercizi

ESERCIZIO 6.1. *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^{2\pi} |x - \frac{\pi}{2}| \sin x \; dx.$$

r. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |x - \frac{\pi}{2}| \sin x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x + \frac{\pi}{2}) \sin x \; dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \sin x \; dx.$

Integrando per parti l'integrale contenente $x \sin x$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} |x - \frac{\pi}{2}| \sin x \; dx = -2 - \pi.$$

ESERCIZIO 6.2. *Calcolare l'integrale*

$$\int_{-3}^{3} |x + 2| + |x - 1| \; dx.$$

r. *Abbiamo*

$$\int_{-3}^{-2} (-x - 2) + (-x + 1) dx = \int_{-3}^{-2} -2x - 1 dx = -x^2 - x|_{-3}^{-2} = 4,$$

$$\int_{-2}^{1} (x + 2) + (-x + 1) dx = \int_{-2}^{1} 3 dx = 3x|_{1}^{-2} = 9,$$

$$\int_{1}^{3} (x + 2) + (x - 1)) dx = \int_{1}^{3} 2x + 1 dx = x^2 + x|_1^3 = 10.$$

Da cui

$$\int_{-3}^{3} |x + 2| + |x - 1| dx = 23.$$

ESERCIZIO 6.3. *Determinare* $a \in (-1, 1)$ *tale che*

$$\int_0^a \frac{dx}{1 - x^2} = \ln 2.$$

r. Abbiamo

$$\int_0^a \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + a}{1 - a}$$

Da cui

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + a}{1 - a} = \ln 2,$$

$$\frac{1 + a}{1 - a} = 4.$$

Quindi

$$a = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 6.4. *Calcolare l'integrale*

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx.$$

r. L'integrale si puó scrivere:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c,$$

tenuto conto che

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Esercizio 6.5. *Calcolare gli integrali*

$$\int_1^2 \frac{1}{3}(x^x(\log x+1))dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x-\sin^2 x|dx.$$

r. Calcoliamo il primo integrale. Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{1}{3}(x^x(\log x+1))dx=\frac{2^2-1^1}{3}=1.$$

Calcoliamo il secondo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x-\sin^2|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x|dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 6.6. *Calcolare l' integrale*

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\pi-x)}dx.$$

r. Risulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\pi-x)}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}dx=$$

posto

$$y=\frac{\pi}{2}+x,$$

procediamo per sostituzione

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{\sin y}dy=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}}dy.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per

$$\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}},$$

troviamo
$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}}}{\tan\frac{y}{2}} d(\frac{y}{2}).$$
Da cui otteniamo il calcolo dell'integrale
$$-\ln|\tan z|$$
ove $z = \frac{y}{2}$ calcolato tra $z = \frac{\pi}{4}$ e $z = \frac{\pi}{3}$. Quindi
$$-\ln|\tan(\frac{\pi}{3})| = -\ln\sqrt{3}.$$

Esercizio 6.7. *Calcolare*
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x - 1|}{\sin^2 x} dx.$$

r. Abbiamo
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x - 1|}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin^2 x} dx =$$
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx =$$
$$\log|\tan(\frac{\pi}{6})| + \cot\frac{\pi}{3} = \log\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 6.8. *Calcolare*
$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x} dx.$$

r. *Poniamo*
$$x = \arctan t$$
ossia
$$t = \tan\frac{x}{2}.$$
Da cui
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
Inoltre
$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$
$$\int \frac{1}{5-3\cos x} dx = \int \frac{2}{8t^2+2} dt = \int \frac{1}{4t^2+1} dt =$$
Poniamo
$$z = 2t$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2}\arctan z.$$
Sostituendo z si ha
$$\int \frac{1}{5-3\cos x} dx = \frac{1}{2}\arctan\Big(2\tan\frac{x}{2}\Big).$$

Esercizio 6.9. *Calcolare l'integrale, al variare* $0 < \lambda < 1$,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin\lambda x| \sin\lambda x dx.$$

r. Essendo $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda x < \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin \lambda x| \sin \lambda x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \lambda x)^2 dx.$$

Sostituendo $\lambda x = t$, $\lambda dx = dt$, da cui $dx = \frac{1}{\lambda} dt$ Da cui l'integrale indefinito si risolve per sostituzione ed integrazione per parti (oppure fecendo uso di formule trigonometriche). Si ottiene

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\lambda} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \cos \frac{\lambda\pi}{2}.$$

Esercizio 6.10. *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} |\sin x| \cos |x|| \cos x| dx.$$

r. Nell'insieme $[0, \frac{3\pi}{4}]$ la funzione $\sin x$ è non negativa, quindi

$$|\sin x| = \sin x$$

e anche x, quindi $|x| = x$, mentre $\cos x$ cambia segno e quindi

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| \cos |x|| \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\cos x)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x (\cos x)^2 dx,$$

quindi

$$\int_0^{\pi} |\sin x| \cos |x| dx = \frac{1}{3}(1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^3).$$

Esercizio 6.11. *Calcolare l'integrale*

$$\int_e^{2e} \frac{\log x}{x} dx$$

Esercizio 6.12. *Calcolare*

$$\int \log x dx \qquad \int x e^x dx,$$

utilizzando la formula di integrazione per parti.

Esercizio 6.13. *Sia $m \geq 2$; dimostrare, tramite la formula di integrazione per parti, che vale la formula*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \; dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \; dx.$$

Segue allora iterando la formula

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \; dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2i} \sin^{2n+1} x \; dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

e

$$\frac{\pi}{2} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \; dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \; dx.}$$

Ora

$$1 < \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\ dx} = \frac{2n+1}{2n} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\ dx.} \leq 1 + \frac{1}{2n},$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\ dx} = 1,$$

e

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n+1)}$$

e

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \cdot (2n-1) \cdot \sqrt{(2n+1)}} = \sqrt{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdot (2n-2) \cdot (\sqrt{2n})}{3 \cdot 5 \cdot \cdot (2n-1)}$$

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

Ricapitolando

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

Esercizio 6.14. *Dimostrare, utilizzando risultati di teoria, che*

$$\int_0^1 e^{t^2} dt > \frac{43}{30}.$$

r.Abbiamo

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + O_4(t)$$

con

$$O_4(t) > 0$$

in $(0,1]$. Quindi

$$e^{t^2} \geq 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

e

$$\int_0^1 e^{t^2} dt > \int_0^1 (1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) dt = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{43}{30}.$$

Esercizio 6.15. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t} \sin\sqrt{t} dt}{\sin x}.$$

r Il limite è nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando de l'Hopital, e utilizzando il teorema fondamentale del calcolo per il numeratore si ha che il limite è 0.

ESERCIZIO 6.16. *Calcolare l'area del triangolo che ha come estremi* $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0)$ *e* $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, f(\frac{\sqrt{\pi}}{2}))$ *con*

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2} - 1.$$

Specificare (motivando la risposta) se tale area costituisce un'approssimazione per eccesso o per difetto dell'area della regione piana limitata individuata dall'asse x*, dalle rette* $x = 0$*,* $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *e dal grafico della funzione* f*.*

r L'area del triangolo si ottiene:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}.$$

Inoltre tale area costituisce un'approssimazione per difetto, essendo la funzione convessa e dunque il suo grafico al di sotto della retta congiungente $(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, e^{-\sqrt{\frac{\pi}{4}}})$ e $(0,0)$:

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{-\pi}{4}}x, \qquad x \in (0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}).$$

Da cui il risultato segue per integrazione.

ESERCIZIO 6.17. *Valutiamo*

$$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

Ma vale anche

$$\int \sin x \cos x dx = -\int \cos x d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

Trovare la spiegazione

CAPITOLO 3

Cenni sulle equazioni differenziali ordinarie: consultare testo

1. Equazioni del primo ordine: formula risolutiva

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

$$y(x) = e^{\int a(t)dt}\left[c + \int b(s)e^{-\int a(\tau)d\tau}ds\right],$$

ESERCIZIO 1.1. *Verificare che* $y(x) = e^{\int a(t)dt}\left[c + \int b(s)e^{-\int a(\tau)d\tau}ds\right]$, *è, al variare di* $c \in \mathbb{R}$, *una famiglia di soluzioni di* $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$

La soluzione dell'equazione differenziale si ottiene sommando alla famiglia di soluzioni dell'equazione omogenea una soluzione particolare. Nel caso in esame la soluzione particolare è data da

$$y(x) = e^{\int a(t)dt}\int b(s)e^{-\int a(\tau)d\tau}ds$$

1.1. Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}ds\right]$$

2. Equazioni del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Si considera il polinomio caratteristico$P(\lambda)$ cos`ì definito

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

di cui si determinano le radici

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Posto

$$\Delta = a^2 - 4b,$$

si ha

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Si distinguono le radici e più precisamente si ha

$$\Delta \begin{cases} > 0 & \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ = 0 & \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} \\ < 0 & \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \end{cases}$$

e di conseguenza le soluzioni del problema differenziale

$$\Delta \begin{cases} > 0 & y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}(-a-\sqrt{\Delta})x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}(-a+\sqrt{\Delta})x} \\ = 0 & y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}ax} \\ < 0 & y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}ax} \cos(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}x) \end{cases}$$

3. Equazioni del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti:alcuni casi

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

Ci occuperemo del metodo di somiglianza, ossia dato $g(x)$, cercare una soluzione particolare $y_p(x)$ del tipo g.

- $g(x) = Q_n(x),\ Q_n$ polinomio di grado n, allora

$$y_p(x) = \begin{cases} G_n(x) \text{ se } \lambda \text{ non è soluzione di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ xG_n(x) \text{ se } \lambda \text{ è soluzione semplice di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ x^2 G_n(x) \text{ se } \lambda \text{ è soluzione doppia di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

  dove G_n è un polinomio di grado n, i cui coefficienti sono da determinare tramite sostituzione nell'equazione differenziale
- $g(x) = Ce^{\alpha x}$

$$y_p(x) = \begin{cases} Ke^{\alpha x} \text{ se } \alpha \text{ non è soluzione di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ Kxe^{\alpha x} \text{ se } \alpha \text{ è soluzione semplice di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ Kx^2 e^{\alpha x} \text{ se } \alpha \text{ è soluzione doppia di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

  dove K è una costante reale opportuna, da determinare tramite sostituzione nell'equazione differenziale.
- $g(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$$y_p(x) = \begin{cases} K\cos(\beta x) + H\sin(\beta x) \text{ se i}\beta \text{ non è soluzione di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ x(K\cos(\beta x) + H\sin(\beta x)) \text{ se i}\beta \text{ è soluzione di } \mathrm{P}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

  dove K, H costanti reale opportune, da determinare tramite sostituzione nell'equazione differenziale.

3.1. Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_{omogenea} + y_p,$$

con le condizioni $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y_1$

CAPITOLO 4

Conclusione

1. Una disuguaglianza

Dimostriamo la disuguaglianza di cui abbiamo parlato nell' introduzione della prima parte della dispensa con il relativo riferimento bibliografico. Ivan Niven The Two-Year College Mathema- tics Journal, Vol. 3, No. 2. (Autumn, 1972), pp. 13-15.

Si tratta di far vedere che

$$e^{\pi} > \pi^{e}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}.$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = e \quad f(e) = e^{\frac{1}{e}}$$

Si ha che il punto $x = e$ è un punto di massimo stretto assoluto per la funzione nel suo insieme di definizione $(0, +\infty)$, poichè la funzione è derivabile in $(0, +\infty)$ e

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln x} = 1$$

Dunque

$$e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}},$$

e il risultato segue elevando alla πe ambo i membri. □

CAPITOLO 5

Esercizi di Ricapitolazione

1. Esempio di esercizi da risolvere con soluzioni

Esercizio 1

(i) Verificare che $x = 0$ è un punto stazionario della funzione
$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^x},$$
($f'(0) = 0$).

(ii) Verificare che $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 2

Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

Esercizio 3

(i) Calcolare
$$\int_0^4 |e^{2t} - \pi| \, \mathrm{d}t$$

(ii) Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t}{e^x - 1}$$

Esercizio 4

Calcolare la soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria
$$y''(x) + y(x) = x^2$$

Domanda 1

(i) Dare la definizione di derivabilità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0

i) Dare la definizione di derivabilità parziale rispetto alla variabile y per $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0)

(ii) Calcolare la derivata parziale rispetto alla variabile x e la derivata parziale rispetto alla variabile y di $f(x, y) = \sin(x^2 y^3)$

Domanda 2

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua allora

$\boxed{\text{a}}$ f é derivabile $\boxed{\text{b}}$ $|f|$ é continua $\boxed{\text{c}}$ $|f|$ é derivabile

Domanda 3

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ una serie tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

$\boxed{\text{a}}$ La serie converge $\boxed{\text{b}}$ La serie diverge

$\boxed{\text{c}}$ Nessuna delle precedenti

1.1. Soluzioni da completare tramite scrittura o finendo i calcoli.

- $$f(x) = \frac{1}{(1+x)^x}.$$
$$f(x) = \frac{1}{e^{\ln(1+x)^x}} = \frac{1}{e^{x\ln(1+x)}} = e^{-x\ln(1+x)}.$$
$$f'(x) = -e^{-x\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) =$$
$$-\frac{e^{-x\ln(1+x)}}{1+x}\big((1+x)\ln(1+x) + x\big).$$
$$f'(0) = 0$$
$$f''(x) = e^{-x\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)^2 +$$
$$-e^{-x\ln(1+x)}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) =$$
$$-\frac{e^{-x\ln(1+x)}}{1+x}\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)$$
$$f''(0) = -2 < 0$$
- .
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$$
- $$\text{se } e^{2t} - \pi \geq 0 \,\text{allora}\, |e^{2t} - \pi| = e^{2t} - \pi.$$
Si ha
$$e^{2t} \geq \pi \iff t \geq \ln\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^4 |e^{2t} - \pi|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln\sqrt{\pi}} (\pi - e^{2t})\,\mathrm{d}t + \int_{\ln\sqrt{\pi}}^4 (e^{2t} - \pi)\,\mathrm{d}t = \dots$$

- $$y''(x) + y(x) = x^2$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y_p(x)$$
$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_p^{''}(x) = 2a,$$
$$2a + ax^2 + bx + c = x^2$$

$$a = 1,\ b = 0,\ c = -2,$$
$$y_p(x) = x^2 - 2$$

- **D1**

$$f(x, y) = \sin(x^2 y^3)$$
$$f_x(x, y) = 2xy^3 \cos(x^2 y^3)$$
$$f_y(x, y) = 3y^2 x^2 \cos(x^2 y^3)$$

- **D2**

  La risposta esatta è b.

- **D3**

  La risposta esatta è a (criterio della radice).

CAPITOLO 6

Ulteriori risultati ottenibili tramite la teoria studiata

1. Disuguaglianza di Young

Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ il coniugato di p è il numero reale q tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

TEOREMA 1.1. *Disuguaglianza di Young (esponenti reali): dati due numeri reali positivi x e y, e dati p, q numeri reali coniugati, si ha*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(x^q).$$

Elevando a esponenziale

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(x^q)}$$

Dalla convessità della funzione esponenziale

$$e^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(x^q)} \leq \frac{1}{p}e^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(x^q)} = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q.$$

Segue il risultato. □

2. Trascendenza di e

Ricordiamo il seguente risultato di Hermite sulla trascendenze e.

TEOREMA 2.1. *Il numero e è trascendente, cioè non soddisfa una equazione algebrica a coefficienti interi*

DIMOSTRAZIONE. Sia f un polinomio di grado n. Abbiamo $f(x) = 0$. Integrando per parti

$$\int_0^a f(x)e^{-x}\,dx + \left[e^{-x}f(x)\right]_0^a + \int_0^a f'(x)e^{-x}dx = 0$$

Ripetendo questa procedura otteniamo

$$\int_0^a f(x)e^{-x}\,dx + \left[e^{-x}(f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x))\right]_0^a = 0.$$

Per semplicità di scrittura poniamo

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)$$

Ne segue, moltiplicando per e^a

$$e^a F(0) = F(a) + e^a \int_0^a f(x)e^{-x}\, dx$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Applichiamo l'identità per $a = 1, \ldots, m$, e moltiplichiamo ciascuna equazione per c_i

$$c_1 e F(0) = c_1 F(1) + c_1 e^1 \int_0^1 f(x)e^{-x}\, dx$$

$$c_2 e^2 F(0) = c_2 F(2) + c_2 e^2 \int_0^2 f(x)e^{-x}\, dx$$

....

$$c_m e^m F(0) = c_m F(m) + c_m e^m \int_0^m f(x)e^{-x}\, dx$$

Sommiamo

$$c_1 e F(0) + c_2 e^2 F(0) + \cdots + c_m e^m F(0) =$$

$$c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_m F(m) +$$

$$+ c_1 e^1 \int_0^1 f(x)e^{-x}\, dx + c_2 e^2 \int_0^2 f(x)e^{-x}\, dx + \ldots c_m e^m \int_0^m f(x)e^{-x}\, dx$$

Assumiamo per contraddizione che per alcuni interi $c_0, \ldots, c_m$ tali che $c_0 \neq 0$.

$$c_0 + c_1 e + \cdots + c_m e^m = 0$$

Deduciamo la seguente identità

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)e^{-x}\, dx.$$

Arriveremo a una contraddizione se troviamo un polinomio f tale che

$$|c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m)| \geq 1$$

mentre

$$\left| \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)e^{-x}\, dx \right| < 1.$$

Fissiamo un numero p primo e sufficientemente grande, soddisfacente $p > m$ e $p > |c_0|$, e consideriamo il polinomio

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-m)^p.$$

Osserviamo

- f, f',..., $f^{(p-1)}$si annullano tutti in 1, 2,..., m.
- Derivando f otteniamo che $f^{(p)}$, $f^{(p+1)}$,...sono polinomi i cui coefficienti sono multipli interi di p.

Allora dalla definizione di F segue

(1) $F(1),\ F(2), \ldots, F(m)$ sono multipli di p.

Inoltre osserviamo che

- $$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0$$
$$f^{(p)}(0),\ f^{(p+1)}(0), \ldots \text{sono multipli di } p.$$
- Inoltre $f^{(p-1)}(0) = (-1)^{mp}(m!)^p$ è un intero, non è un multiplo di p perchè $p > m$. Poichè $0 < |c_0| < p$, segue
$$F(0) \quad \text{è un intero, non è un multiplo di } p.$$
Allora
$$|c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_mF(m)| \geq 1$$
Per la dimostrazione
$$\Big|\sum_{i=0}^m c_ie^i \int_0^i f(x)e^{-x}\ dx\Big| < 1.$$
osserviamo
$$|f(x)| \leq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \quad \text{if} \quad 0 \leq x \leq m.$$
Quindi
$$\Big|\sum_{i=0}^m c_ie^i \int_0^i f(x)e^{-x}\ dx\Big| \leq \Big(\sum_{i=0}^m c_ie^i\Big)\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$
$$= \Big(\sum_{i=0}^m c_ie^im^m\Big)\frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}.$$
Poichè l'ultimo termine tende a 0 per $p \to +\infty$, per p grande si ottiene la disuguaglianza.

$\square$

3. Resto Integrale e di Lagrange

Definizione 3.1. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor*
$$r_n(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Teorema 3.2. *Se f è derivabile $n+1$ volte, per il resto vale*
$$r_n(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da
$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$$
Assunto vera l'affermazione al passo $n-1$
$$r_{n-1}(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt =$$

$$-\left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

In conclusione

$$r_{n-1}(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0) = f(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)\right] =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

TEOREMA 3.3.

$$r_n(x_0) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

DIMOSTRAZIONE.

$$r_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi. □

ESERCIZIO 3.4. *Per $x > 0$ si definisce la Funzione Γ di Eulero*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dimostrare che valgono le proprietà

- $$\Gamma(1) = 1,$$
- $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \; \forall x > 0$$
- $$\Gamma(n+1) = n! \; \forall \, n \in \mathbb{N}.$$