ANALISI MATEMATICA 1
INGEGNERIA AEROSPAZIALE

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof. F. Giordano

Compito A

Cognome e nome...

Matricola .... Anno di immatricolazione ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x+1)^k}{2^k + \ln(k+1)}.$$

2) Data la funzione

$$\begin{cases} \frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}+ax}{x^3}, & x<0; \\ b, & x=0; \\ \frac{\int_0^x (e^{t^2+1}-e)dt}{x}, & x>0, \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin del coseno: $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$.

Detta

$$g(x) = \frac{1-\cos(x)-(x^2)/2}{x},$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste la retta tangente in $\bar{x} = \sqrt{\pi}/2$ e nel caso scriverne l'equazione.

3) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x^2)}{x^2} dx$$

converge. Calcolare poi il valore dell'integrale per $\alpha > 0$.

4) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto. Dimostrare che una funzione derivabile in un punto è ivi continua. Che tipo di condizione fornisce? Commentare con esempi e controesempi.

ANALISI MATEMATICA 1
INGEGNERIA AEROSPAZIALE

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof. F. Giordano

Compito B

Cognome e nome...

Matricola .... Anno di immatricolazione ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro reale $x \in (0, +\infty)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\ln^2 x + 1\right)^k}{k^3 + \ln k + 1}.$$

2) Data la funzione

$$\begin{cases} \frac{e^{x^2}-1-x^2+ax}{x^3}, & x<0; \\ b, & x=0; \\ \frac{\int_0^x (e^{t^2+2}-e^2)dt}{2x}, & x>0, \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $y = e^t$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ... + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$.

Detta

$$g(x) = \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x},$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste la retta tangente in $\bar{x} = 1$ e nel caso scriverne l'equazione.

3) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R} e \beta \in \mathbb{R}$ l'integrale:

$$I(\alpha, \beta) = \int_1^{+\infty} x^\alpha \arctan{(\beta + x^2)} dx$$

Calcolare poi il valore dell'integrale per $\alpha = \beta = 1$. Suggerimento: Determinare preliminarmente l'insieme di definizione della funzione integranda al variare di α e β.

4) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Darne l'interpretazione geometrica.

ANALISI MATEMATICA 1
INGEGNERIA AEROSPAZIALE

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof. F. Giordano

Compito C

Cognome e nome...

Matricola .... Anno di immatricolazione ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k + \ln(k+1)}{(2+e^x)^k}.$$

2) Data la funzione

$$\begin{cases} \frac{1-\cos x^2-\frac{x^4}{2}+ax}{x^5}, & x<0; \\ b, & x=0; \\ \frac{\int_0^x (e^{t^4+1}-e)dt}{x}, & x>0, \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin di $y = \cos t$:
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$.

Detta

$$g(x) = \frac{1 - \cos x^2 - \frac{x^4}{24}}{x}$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste la retta tangente in $\bar{x} = \sqrt{\pi}/2$ e nel caso scriverne l'equazione.

3) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R} e \beta \in \mathbb{R}$ l'integrale:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^\alpha \arcsin{(\beta x)} dx$$

Calcolare poi il valore dell'integrale per $\alpha = \beta = 1$. Suggerimento: Determinare preliminarmente l'insieme di definizione della funzione integranda al variare di α e β.

4) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange. Darne l'interpretazione geometrica.

ANALISI MATEMATICA 1
INGEGNERIA AEROSPAZIALE

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof. F. Giordano

Compito D

Cognome e nome..

Matricola .... Anno di immatricolazione ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro reale $x \in (0, +\infty)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 + \ln k + 1}{\left(1 + \ln^2 x\right)^k}.$$

2) Data la funzione

$$\begin{cases} \frac{e^{(x-1)^2}-1-(x-1)^2+a(x-1)}{(x-1)^3}, & x < 1; \\ b, & x = 1; \\ \frac{\int_0^{x-1}(e^{t^2+2}-e^2)dt}{2(x-1)}, & x > 1, \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulta continua e derivabile in $x = 1$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $y = e^t$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ... + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$.

Detta

$$g(x) = \frac{e^{(x-1)^2} - 1 - (x-1)^2}{(x-1)},$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste la retta tangente nel punto $\bar{x} = 0$ e scriverne nel caso l'equazione.

3) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale:

$$I(\alpha) = \int_1^2 \frac{\log\left[1 + \alpha(x-1)^2\right]}{(x-1)^2} dx$$

converge. Calcolare poi il valore dell'integrale per $\alpha > 0$.

Suggerimento: Determinare preliminarmente l'insieme di definizione della funzione integranda al variare di α e β.

4) Dare la definizione di minimo e massimo relativo. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat. Che tipo di condizioni fornisce? Commentare con esempi e controesempi.