Esame di Geometria BAER
Appello del 16/2/2021 testo A

Questo è un test da svolgere per verificare il livello di apprendimento. Non è valutato ai fini dell'esame. Le soluzioni saranno pubblicate sul sito del corso e discusse in un tutoraggio.

Tempo: **150 minuti**

Il test va svolto senza usare appunti né libri, senza consultarsi con altri, e *senza distrazioni*.

Per le ultime due domande Vanno scritte soluzioni *dettagliate* ma *concise*, spiegando brevemente perché si svolgono determinati conti, scrivendo esplicitamente da cosa si parte e cosa si ottiene alla fine. All'esame, gli esercizi che richiedono lo svolgimento se svolti solo con conti senza spiegazioni *non ricevono alcun punteggio*. Per i primi due esercizi si richiede solo la risposta (ma nelle soluzioni io fornirò almeno una traccia dello svolgimento).

L'esame consiste di 4 domande, e ha la durata di 2 ore e 30 minuti. Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato nello spazio sottostante usando l'editor oppure nei fogli scansionati (in questo caso scrivere con l'editor sotto la domanda 'risposta scansionata'). Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia su un foglio separato. Attenzione: le risposte non sufficientemente motivate, o quelle che contengono solo conti senza spiegazioni, non saranno valutate. La brutta copia non è da consegnare. Segnare dopo l'ultima domanda, usando l'editor, eventuali date nelle quali per VALIDI MOTIVI non si è disponibili per sostenere l'esame orale.

Esercizio 1.

(Scrivere solo i risultati). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

si trovino

a) La dimensione e una base del sottospazio
$U = \{X \in \mathrm{Mat}(2 \times 2) \text{ t.c. } XA = AX\}$ (3 punti)

b) Definiamo un prodotto scalare (ossia una forma bilineare definita positiva) nello spazio vettoriale delle matrici ponendo $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^t B)$. Scrivere la matrice associata rispetto alla base canonica dello spazio delle matrici e si trovi $U^\perp = \{X \in \mathrm{Mat}(2) | \forall M \in U \langle M, X \rangle = 0\}$
(La traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale) (4 punti)

Esercizio 2.

(Scrivere solo i risultati). Si considerino i punti dello spazio
$A = (1, 0, 2)$, $B = (0, 1, -2)$, $C = (1, 1, 0)$.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r passante per A, B, e l'equazione parametrica della retta r' perpendicolare e incidente a r e passante per C (4 punti)

(b) *(3 punti)* Si scriva l'equazione cartesiana del piano π perpendicolare a r' passante per C e le equazioni parametriche della retta ρ per C contenuta in π e perpendicolare a r. (3 punti)

Esercizio 3.

(Svolgimento in bella copia). Nel piano, si consideri la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.

(a) Si trovino centro e raggio di γ. (2 punti)

(b) Sia P il punto di intersezione di γ con la retta $r : x - 2y = 0$ più vicino all'origine. Si scriva l'equazione della retta s per l'origine parallela alla tangente a γ in P. (3 punti)

(c) Si scriva la matrice canonica della proiezione su r (3 punti)

Esercizio 4.

(Svolgimento in bella copia). Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice canonica

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si trovino basi di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ (2 punti)

(b) Si trovi (se possibile) una base ortonormale di autovettori di f (3 punti)

(c) Si trovino gli autovalori di $f \circ f$ (3 punti)