Geometria BETR
Foglio esercizi 9

Esercizio 1.
Si consideri il sottospazio

$$U = L\left[\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

.

(a) Si trovino le equazioni cartesiane ed una base ortonormale di $U^\perp$.
(b) Si trovi una base ortonormale di U.
(c) Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica.

Esercizio 2.
Si consideri il vettore di $\mathbb{R}^4$ $\underline{v} = (1, 0, 1, 3)^t$.
(a) Si trovi una base ortonormale del sottospazio $L[\underline{v}]^\perp$.
(b) Si estenda la base trovata ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.
Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ alla base data dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.
Si consideri il vettore $(1, 3, 5, 7)^t$- Si trovino le sue proiezioni ortogonali sui sottospazi $U = L[(1, 1, 1, 1)^t, (1, -3, 4, -2)^t]$ e $V = L[(1, 1, 1, 1)^t, (1, 2, 3, 2)^t]$.

Esercizio 5.
(a) Si trovino tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ aventi norma 1 e perpendicolari al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(b) Si trovino tutti i vettori aventi norma 1 perpendicolari ai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(c) Si trovino tutti i vettori perpendicolari a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aventi norma 1. Geometricamente cosa è l'insieme di questi vettori?

Esercizio 6.
Si completi la matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ -1/\sqrt{3} & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ ad una matrice ortogonale.

Esercizio 7.
Si diagonalizzi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e si verifichi che gli autospazi sono ortogonali tra loro. Si scriva quindi una matrice ortogonale M tale che $M^t AM$ è diagonale.

Esercizio 8.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Si trovino il nucleo di f, l'immagine di f e il suo polinomio caratteristico
b) Si trovi una base ortonormale di autovettori.

Esercizio 9.
Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si trovi una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^t AM$.

Esercizio 10.
Si trovino matrici D diagonale e M ortogonale tali che

$$D = M^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$$

Esercizio 11.
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(a) È vero che f è simmetrico?
(b) Si calcoli la matrice canonica di f.

Esercizio 12.
Si trovino gli autovalori e una base ortonormale di autovettori delle matrici

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Geometricamente cos'è l'endomorfismo T_θ?

Esercizio 13.
Sia U il sottospazio dato dalle soluzioni dell'equazione $-x + 2y = 0$

(a) Trovare una base ortonormale di U ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
(b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simmetrico con $\operatorname{Ker} f = U$. Trovare le matrice canonica di f (*Suggerimento f come sopra non è unica, quindi la matrice dipenderà da un parametro).*

Esercizio 14.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\langle f(v), v\rangle = 0$ per ogni $\underline{v} \in R^n$; ed f non è l'applicazione nulla.

(a) È vero che f non è diagonalizzabile?
(b) Si dia un esempio di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa queste proprietà.

Esercizio 15.
Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto standard di $\mathbb{R}^n$, U, W sottospazi. Si mostri che

(a) Se $W \subseteq U$ allora $U^\perp \subseteq W^\perp$.

(b) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

(c) $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

Esercizio 16.

Si mostri che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice reale antisimmetrica allora $\lambda = 0$