Geometria BETR
Foglio esercizi 9

Esercizio 1.

Si consideri il sottospazio

$$U = L\left[\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{v}_2 \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

.

(a) Si trovino le equazioni cartesiane ed una base ortonormale di $U^\perp$.

(b) Si trovi una base ortonormale di U.

(c) Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica.

Soluzione: a) *) Il sottospazio $U^\perp$ si ottiene imponendo che il generico vettore $\underline{x} \in R^4$ sia ortogonale a tutti i vettori di una base (non necessariamente ortogonale o ortonormale) di U. Basta quindi risolvere il sistema*

$$\begin{cases} \langle \underline{v}_1, \underline{x}\rangle = 0 \\ \langle \underline{v}_2, \underline{x}\rangle = 0 \\ \langle \underline{v}_3, \underline{x}\rangle = 0 \end{cases} \quad \textit{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono tutte multiple del vettore unitario $\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

b) *) I tre vettori sono lin. indip. Osserviamo che il primo ed il terzo vettore sono ortogonali tra loro, quindi prendiamo $\underline{w}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{w}_2 = \underline{v}_3$,*

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_1\rangle}{\|\underline{w}_1\|^2}\underline{w}_1 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_2\rangle}{\|\underline{w}_2\|^2}\underline{w}_2 = \begin{pmatrix}4/5\\2/5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Ora abbiamo una base ortogoonale, la base ortonormale si ottiene moltiplicando $\underline{w}_i$ per $\|\underline{w}_i\|^{-1}$, quindi è data da $\{\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{w}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{w}_2, \frac{5}{\sqrt{70}}\underline{w}_3\}$.

c) *) Se p è la proiezione ortogonale su U,*

$$p(\underline{e}_i) = \langle \underline{e}_i, (1/\sqrt{5})\underline{w}_1\rangle(1/\sqrt{5})\underline{w}_1 + \langle \underline{e}_i, (1/\sqrt{2})\underline{w}_2\rangle(1/\sqrt{2})\underline{w}_2 + \langle \underline{e}_i, (5/\sqrt{70})\underline{w}_1\rangle(5/\sqrt{70})\underline{w}_3.$$

Facendo i conti, si trova

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -2 & -2 & 2\\ -2 & 6 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

Alternativamente, è piú facile scrivere la matrice canonica B della proiezione ortogonale su $U^\perp$ e usare l'esercizio precedente: le colonne sono date dai vettori $\langle \underline{e}_i, \underline{u}\rangle\underline{u}$ quindi

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 6 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 6 & -1\\ -2 & -1 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

La matrice canonica della proiezione su U dunque è $I - B$

Esercizio 2.

Si consideri il vettore di $\mathbb{R}^4$ $\underline{v} = (1,0,1,3)^t$.

(a) Si trovi una base ortonormale del sottospazio $L[\underline{v}]^\perp$.

(b) Si estenda la base trovata ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione: a) $\langle \underline{v}, \underline{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$. *Non è difficile trovare due soluzioni ortogonali tra loro, per esempio* $\underline{w}_1 = (1,0,-1,0)^t, \underline{w}_2 = (0,1,0,0)^t$. *Un'altra soluzione, linearmente indipendente dalle due precedenti é* $\underline{w}_3 = (-3,0,0,1)^t$. *Il vettore* $\underline{w}_3$ *è anche ortogonale a* $\underline{w}_2$, *quindi, abbiamo che* $\underline{w}_3 - \frac{\langle \underline{w}_3, \underline{w}_1\rangle}{\|ulw_1\|^2}\underline{w}_1 = (-3/2, 0, -3/2, 1)^t$ *è ortogonale sia a* $\underline{w}_1$ *che a* $\underline{w}_2$ *(ed anche a* $\underline{v}$*). Quindi la base cercata è* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)^t, (0,1,0,0)^t, \frac{2}{\sqrt{22}}(-3/2,0,-3/2,1)^t\}$.

b) *Poichè* $\mathbb{R}^4 = L[\underline{v}] \oplus L[\underline{v}]^\perp$ *basta aggiungere alla base trovata prima il vettore* $\frac{1}{\sqrt{11}}\underline{v}$.

Esercizio 3.

Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ alla base data dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione: Cominciamo dai primi due vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_1\rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Denotato il terzo vettore con $\underline{u}$, *calcoliamo* $\underline{v}_3 = \underline{u} - \frac{\langle \underline{u}, \underline{v}_1\rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1 - \frac{\langle \underline{u}, \underline{v}_2\rangle}{\|\underline{v}_2\|^2}\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$. *Per ottenere la base ortonormale cercata, basta normalizzare* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

Esercizio 4.

Si consideri il vettore $(1,3,5,7)^t$- Si trovino le sue proiezioni ortogonali sui sottospazi $U = L[(1,1,1,1)^t, (1,-3,4,-2)^t]$ e $V = L[(1,1,1,1)^t, (1,2,3,2)^t]$.

Soluzione: La base di U *è composta da vettori ortogonali, basta quindi calcolare i coefficienti di Fourier e la combinazione lineari dei due vettori della base ortonormale per ottenere che la proiezione su* U *è il vettore* $(59/15, 63/5, 56/15, 62/15)^t$.

La base di V *non è ortonormale, con Gram Schmidt troviamo la base ortogonale* $(1,1,1,1)^t, (-1,0,1,0)^t$. *Scrivendo i coefficienti di Fourier come prima, troviamo che la proiezione è* $(7,4,1,4)^t$.

Esercizio 5.

(a) Si trovino tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ aventi norma 1 e perpendicolari al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Si trovino tutti i vettori aventi norma 1 perpendicolari ai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Si trovino tutti i vettori perpendicolari a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aventi norma 1. Geometricamente cosa è l'insieme di questi vettori?

Soluzione: a) $\pm(1/\sqrt{13})\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

b) *I vettori ortogonali ai due vettori dati sono dati dalle soluzioni di* $\begin{cases}x+2y+3z=0\\x+z=0\end{cases}$*, dunque formano il sottospazio* $L[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}]$*; tra questi quelli di norma 1 sono* $\pm(1/\sqrt{3})\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

c) *I vettori ortogonali a* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *formano il piano di equazione* $x+y+z=0$*. La soluzione generale (parametrica) dell'equazione è* $\begin{pmatrix}t\\s\\-t-s\end{pmatrix}$*. I vettori non nulli di questa forma (almeno uno tra* t,s *diverso da* 0*) hanno norma* $\sqrt{2t^2+2s^2+2ts}>0$ *se almeno uno tra* t,s *è non nullo. Quindi sono quelli per cui* $\sqrt{2t^2+2s^2+2ts}=1$*. Geometricamente i vettori di norma 1 di un piano descrivono la circonferenza unitaria giacente sul piano con centro nell'origine.*

Esercizio 6.

Si completi la matrice $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & ? & ?\\ -1/\sqrt{3} & ? & ?\\ ? & ? & ?\end{pmatrix}$ ad una matrice ortogonale.

Soluzione: La prima colonna deve avere norma 1, quindi il coefficiente $(3,1)$ *della matrice può essere solo* $\pm 1/\sqrt{3}$*. Scegliamo (per esempio)* $1/\sqrt{3}$*. Allora gli altri due vettori colonna devono essere in* $U=L[(1/\sqrt{3})(1,-1,1)^t]^\perp$*. Un'equazione per* U *è* $x-y+z=0$*, quindi due generatori di* U *sono* $(1,1,0)^t$ *e* $(0,1,1)^t$*. Applichiamo Gram Schmidt per ottenere una base ortonormale di* U *e otteniamo i due vettori colonna* $(1/\sqrt{2})(1,1,0)^t$, $(1/\sqrt{6})(-1,1,2)^t$

Esercizio 7.

Si diagonalizzi la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\4 & 1\end{pmatrix}$ e si verifichi che gli autospazi sono ortogonali tra loro. Si scriva quindi una matrice ortogonale M tale che M^tAM è diagonale.

Soluzione: Gli autovalori sono $-3,5$*, gli autospazi sono* $E(-3)=L[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}]$, $E(-5)=L[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}]$ *Normalizzando i vettori otteniamo una base ortonormale* $\mathcal{B}$*. La matrice* M *cercata è la matrice di passaggio dalla base canonica a* $\mathcal{B}$ *dunque è* $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$*, la matrice diagonale è* $\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$.

Esercizio 8.

Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice canonica

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

a) Si trovino il nucleo di f, l'immagine di f e il suo polinomio caratteristico

Soluzione: La somma delle tre colonne di A *è nulla dunque* $\operatorname{Ker} f=L[(1,1,1)^t]$ *visto che le prime due colonne sono linearmente indipendenti e generano* $\operatorname{Im} f$*. Il polinomio caratteristico è* $x(x+3)^2$.

b) Si trovi una base ortonormale di autovettori.

Soluzione: $E(0)$ è il nucleo di f, $E(-3) = E(0)^{\perp}$ dunque è lo spazio delle soluzioni di $x + y + z = 0$ (oppure $A + 3I$ è la matrice con tre righe uguali a $(1, 1, 1)$). Una base dunque è data dai vettori $(1, -1, 0)^t, (1, 0, -1)^t$. Questi sono ortogonali a tutti i vettori di $E(0)$ ma il loro prodotto scalare è 1. Applichiamo quindi Gram Schmidt tenendo il primo vettore e scegliendo come secondo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

La base cercata quindi è

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si trovi una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^t A M$.

Soluzione: $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Esercizio 10.

Si trovino matrici D diagonale e M ortogonale tali che

$$D = M^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$$

Soluzione:

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 11.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(a) È vero che f è simmetrico?

(b) Si calcoli la matrice canonica di f.

Soluzione: a) *) Si, perchè i f è diagonalizzabile e i due autospazi sono ortogonali.*

b) *) Se A è la matrice canonica M la matrice di passaggio dalla base canonica alla base ortonormale ottenuta normalizzando i due autovettori, abbiamo*

$$A = M \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.

Si trovino gli autovalori e una base ortonormale di autovettori delle matrici

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Geometricamente cos'è l'endomorfismo T_θ?

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $x^2 - 1 = 0$, quindi gli autovalori sono ± 1. L'autospazio associato a 1 ha equazione $(\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y = 0$ le cui soluzioni sono multipli del vettore $(\sin\theta, 1 - \cos\theta)^t$, mentre l'autospazio $E(-1)$ è il complemento ortogonale dell'altro quindi è generato dal vettore $(\cos\theta - 1, \sin\theta)^t$. Geometricamente T_θ è una riflessione nella retta per l'origine corrispondente a $E(1)$ in quanto questa retta rimane invariata mentre la retta ortogonale viene cambiata di verso. Per trovare le rette in questione serve un po' di trigonometria: ponendo $\theta = 2\alpha$ possiamo scrivere il generatore di $E(1)$ trovato come $(2\sin\alpha\cos\alpha, 1 - (1 - 2\sin^2\alpha)^t = 2\sin\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)^t$, dunque la riflessione è nella retta che fa angolo $\frac{\theta}{2}$ con l'asse positivo delle x.

Esercizio 13.

Sia U il sottospazio dato dalle soluzioni dell'equazione $-x + 2y = 0$

(a) Trovare una base ortonormale di U ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simmetrico con $\operatorname{Ker} f = U$. Trovare le matrice canonica di f (*Suggerimento f come sopra non è unica, quindi la matrice dipenderà da un parametro).*

Soluzione: a) *è facile vedere che $U = L[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$, la base è già ortogonale quindi una base ortonormale di U è $\{\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Il sottospazio $U^\perp$ è generato dal vettore $\underline{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che estende la base data.*

b) *) Poichè f è simmetrico, è diagonalizzabile quindi deve esserci un autospazio di dimensione* 1 *ortogonale a $E(0) = \operatorname{Ker} f = U$. Quindi questo autospazio deve essere $U^\perp$. L'autovalore non si ricava dai dati del problema, quindi può essere qualsiasi $k \in \mathbb{R}$. Sappiamo già $f(\underline{e}_3) = \underline{0}$, calcolando i coefficienti di Fourier $\underline{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{u}_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\underline{w}$ dunque $f(\underline{e}_1) = -\frac{k}{\sqrt{5}}\underline{w}$, e allo stesso modo, $f(\underline{e}_2) = \frac{2k}{\sqrt{5}}\underline{w}$. Poichè la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ é diagonale con elementi sulla diagonale $0, 0, k$ si poteva anche calcolare*

$$\begin{pmatrix} k/5 & -2k/5 & 0 \\ -2k/5 & 4k/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\langle f(v), v \rangle = 0$ per ogni $\underline{v} \in R^n$; ed f non è l'applicazione nulla.

(a) È vero che f non è diagonalizzabile?

(b) Si dia un esempio di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa queste proprietà.

Soluzione: a) *Se λ è autovalore e $\underline{v}$ autovettore associato si deve avere $0 = \langle f(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$, dunque poichè $\underline{v} \neq \underline{0}$ deve essere $\lambda = 0$. Quindi se f fosse diagonalizzabile, sarebbe l'applicazione nulla.*

b) *Una rotazione di $\pi/2$, oppure $f(\underline{e}_1) = \underline{0}$, $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$.*

Esercizio 15.

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto standard di $\mathbb{R}^n$, U, W sottospazi. Si mostri che

(a) Se $W \subseteq U$ allora $U^\perp \subseteq W^\perp$.

Soluzione: I vettori di $U^\perp$ sono ortogonali a tutti i vettori di U, quindi a tutti quelli di W

(b) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

Soluzione: Se $\underline{v} \in (U+W)^\perp$ allora poichè $U \subseteq U+W$ e $W \subseteq U+W$ avremo $\forall \underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$ $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle = 0$, quindi $(U+W)^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$. D'altra parte visto che ogni vettore di $U+W$ si scrive come $\underline{u}+\underline{w}$ con $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$, se $\underline{v} \in U^\perp \cap W^\perp$ allora $\langle \underline{v}, \underline{u}+\underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0+0$ quindi abbiamo l'altra inclusione.

(c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Soluzione: Sia $\underline{v} \in U^\perp + W^\perp$. Allora $\underline{v} = \underline{u}_\perp + \underline{w}_\perp$, $\underline{u}_\perp \in U^\perp$, $\underline{w}_\perp \in W^\perp$, dunque se $\underline{z} \in (U \cap W)$ abbiamo $\langle \underline{z}, \underline{u}_\perp + \underline{w}_\perp \rangle = \langle \underline{z}, \underline{u}_\perp \rangle + \langle \underline{z}, \underline{w}_\perp \rangle = 0+0$, quindi $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap V)^\perp$.
D'altra parte siano $p = \dim U$, $q = \dim W$, allora

$$\dim (U \cap W)^\perp = n - \dim (U \cap W) = n - (p+q-\dim (U+W)),\ \dim (U^\perp + W^\perp) = n-p+n-q-\dim (U^\perp \cap W^\perp)$$

Per il punto precedente abbiamo $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$, dunque $\dim (U^\perp \cap W^\perp) = \dim (U+W)^\perp = n - \dim (U+W)$. Sostituendo

$$\dim (U^\perp + W^\perp) = n-p+n-q-\dim (U^\perp \cap W^\perp) = n-p+n-q-(n-\dim (U+W)) = n-p-q+\dim (U+W)$$

Quindi la dimensione è la stessa e i due sottospazi coincidono.

Esercizio 16.

Si mostri che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice reale antisimmetrica allora $\lambda = 0$

Soluzione: Sia $\underline{v}$ un autovettore, $\lambda \|\underline{v}\|^2 = \langle \lambda \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle A\underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, -A\underline{v} \rangle = -\lambda \|\underline{v}\|^2$