

**Geometria BETR**  
**Foglio esercizi 8**

**Esercizio 1.**

Se  $A \in \text{Mat}(n)$  è una matrice quadrata, definiamo la traccia di  $A$  come la somma degli elementi sulla diagonale:  $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ . Si mostri che se  $A$  è una matrice due per due, il suo polinomio caratteristico si scrive  $\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$ .

**Esercizio 2.**

Calcolare il polinomio caratteristico  $A - \lambda I$  e gli autovalori delle seguenti matrici. trovare una base di autovettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.**

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.**

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 5.**

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'unica applicazione lineare tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- (a) Quali sono gli autovalori di  $f$ ?
- (b) Si trovi la matrice canonica di  $f$

**Esercizio 6.**

Trovare un endomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che gli autovalori di  $f$  sono  $-2, 1$  e  $f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . è vero che  $f$  è unico?

**Esercizio 7.**

Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , si consideri l'endomorfismo  $T : \text{Mat}(2 \times 2) \rightarrow \text{Mat}(2 \times 2)$  dato dalla moltiplicazione per  $A$ , i.e.  $T(X) = AX$  per ogni matrice  $X \in \text{Mat}(2 \times 2)$

- (a) Si scriva la matrice di  $T$  rispetto alla base canonica di  $\text{Mat}(2 \times 2)$

(b) Si trovino gli autovalori di  $T$ .

**Esercizio 8.**

Si trovino una matrice diagonale  $D$  e una matrice invertibile  $M$  tali che  $D = M^{-1}AM$  dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Attenzione la matrice diagonale non è unica, l'ordine in cui appaiono gli autovalori sulla diagonale è arbitrario e dipende dall'ordine che si sceglie per una base di autovettori; quello che non cambia sono gli autovalori e il numero di volte che un dato autovalore si ripete sulla diagonale (parte del lavoro è stato svolto nel precedente foglio di esercizi).

**Esercizio 9.**

Si trovino una matrice diagonale  $D$  e una matrice invertibile  $M$  tali che  $D = M^{-1}AM$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 10.**

Per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la matrice  $\begin{pmatrix} 3-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-2 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile?

**Esercizio 11.**

Sia  $f$  un endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  con autovalori 2, 1 ed autospazi

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \right\}, \quad E(1) = L \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(a) è vero che  $f$  è diagonalizzabile?

(b) Trovare una base di autovettori per  $f$ .

**Esercizio 12.**

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -4 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e si trovino gli autovalori (con relative molteplicità) e autovettori di  $A$  e  $B$ . È vero che  $A$  e  $B$  sono simili?

**Esercizio 13.**

Siano  $A, B$  matrici simili,  $B = M^{-1}AM$

(a) Si mostri che  $B^n$  e  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sono simili

(b) Si calcolino  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^3$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^n$

**Esercizio 14.**

Si mostri che  $f : V \rightarrow V$  non è iniettiva se e solo se il suo polinomio caratteristico è della forma  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x$

**Esercizio 15.**

Si risponda motivando brevemente la risposta.

- (a) Sia  $f : V \rightarrow V$  un operatore lineare con polinomio caratteristico  $-x^3 + x^2 + 6x$ . Che dimensione ha  $V$ ? È vero che  $f$  è diagonalizzabile sui reali?
- (b) Sia  $f$  un operatore lineare con polinomio caratteristico  $(x-1)(x^2-3x+2)$ . È vero che  $f$  è suriettivo?

**Esercizio 16.**

Dato l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^2[x]$  tale che

$$f(1) = 1 + x^2 \quad f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad f(x^2) = 2x^2$$

Si determinino gli autovalori, basi degli autospazi e si dica se  $f$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 17.**

Si consideri la base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^2$  data dai vettori  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Si trovino, se esistono, vettori  $\underline{v}$  di  $\mathbb{R}^2$  tali che le coordinate di  $\underline{v}$  rispetto a  $\mathcal{B}$  sono uguali alle coordinate di  $\underline{v}$  rispetto alla base canonica.

**Esercizio 18.**

Sia  $V \subset \text{Mat}(2)$  il sottospazio delle matrici aventi traccia nulla, con base  $\mathcal{B} = \{A = E_2, B = E_3, C = E_1 - E_4\}$ , dove  $E_i$  è l' $i$ -esima matrice della base canonica. Per  $h \in \mathbb{R}$ , sia  $f_h : V \rightarrow V$  l'unica applicazione lineare tale che

$$f_h(A+B) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix} \quad f_h(2B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad f_h(A-B+C) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}$$

- (a) Scrivere la matrice di  $f_h$  rispetto alla base  $\{A, B, C\}$
- (b) Trovare per quali valori di  $h$  l'endomorfismo è diagonalizzabile.

**Esercizio 19.**

Se  $r$  è una retta per l'origine del piano, che identifichiamo con  $\mathbb{R}^2$ , la riflessione in  $r$  manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto a  $r$ . Se  $\underline{u}_1$  è un vettore che giace in  $r$  e  $\underline{u}_2$  un vettore che giace sulla perpendicolare a  $r$  per l'origine, rispetto alla base formata da questi due vettori la matrice della riflessione è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in quanto  $r$  resta fissa e la retta ortogonale cambia verso.

- (a) Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta  $r : x - y = 0$
- (b) Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta  $r : ax + by = 0$  (si assuma  $a \neq 0, b \neq 0$ )

**Esercizio 20.**

Sia  $f : V \rightarrow V$  una proiezione, ovvero un endomorfismo tale che  $f^2 = f \circ f = f$ .

- (a) Si dimostri che se  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un autovalore di  $f$  allora  $\lambda \in \{0, 1\}$ .  
Quindi poichè  $\underline{v} \neq \underline{0}$  deve essere  $\lambda = \lambda^2$  e dunque  $\lambda$  può essere solo 0 oppure 1.
- (b) Si mostri che  $f$  è diagonalizzabile. (Suggerimento: usare che anche  $\text{Id} - f$  è una proiezione).