

Geometria BETR Foglio esercizi 8

Esercizio 1.

Se $A \in \text{Mat}(n)$ è una matrice quadrata, definiamo la traccia di A come la somma degli elementi sulla diagonale: $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Si mostri che se A è una matrice due per due, il suo polinomio caratteristico si scrive $\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Soluzione: $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Esercizio 2.

Calcolare il polinomio caratteristico $A - \lambda I$ e gli autovalori delle seguenti matrici. trovare una base di autovettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Gli autovalori di A_1 sono 1 e -1 , gli autovalori di A_2 sono 1, 2 e l'unico autovalore di A_3 è 0.

Esercizio 3.

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico $\det(A - xI) = (-3 - x)[(-2 - x)(1 - x) + 2] = (-3 - x)(x^2 + x)$ (sviluppando lungo la seconda colonna). Quindi gli autovalori sono 0, -1 , -3 ,

Esercizio 4.

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $x^3 + 3x^2 + 2x$, gli autovalori 0, -1 , -2 .

Esercizio 5.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- (a) Quali sono gli autovalori di f ?
- (b) Si trovi la matrice canonica di f

Soluzione: a) Gli autovalori sono 0, 2.

b) Posto $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ la matrice di passaggio dalla base canonica alla base determinata dai tre

autovettori dati, se A è la matrice canonica di f , abbiamo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1}AM$. Dunque

$$A = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & -2/7 \\ -1/7 & 1/7 & 2/7 \\ -6/7 & 6/7 & 12/7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.

Trovare un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che gli autovalori di f sono $-2, 1$ e $f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. È vero che f è unico?

Soluzione: La matrice di f deve avere come prima colonna il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico deve essere $(x+1)(x-2) = x^2 + x - 2$, dunque la traccia di A deve essere -1 quindi il coefficiente a_{22} della matrice canonica di f deve essere -4 . Il determinante deve essere -2 il che impone $a_{12} = -5$. Allora deve essere $f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ed f è unico.

Esercizio 7.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, si consideri l'endomorfismo $T : \text{Mat}(2 \times 2) \rightarrow \text{Mat}(2 \times 2)$ dato dalla moltiplicazione per A , i.e. $T(X) = AX$ per ogni matrice $X \in \text{Mat}(2 \times 2)$

- Si scriva la matrice di T rispetto alla base canonica di $\text{Mat}(2 \times 2)$
- Si trovino gli autovalori di T .

Soluzione: a) Siano E_{ij} le matrici della base canonica, abbiamo

$$T(E_{11}) = E_{11} + 2E_{21}, T(E_{12}) = E_{12} + 2E_{22}, T(E_{21}) = 3E_{21}, T(E_{22}) = 3E_{22}.$$

Dunque la matrice canonica di T è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Il polinomio caratteristico è $(1-x)^2(3-x)^2$.

Esercizio 8.

Si trovino una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Attenzione la matrice diagonale non è unica, l'ordine in cui appaiono gli autovalori sulla diagonale è arbitrario e dipende dall'ordine che si sceglie per una base di autovettori; quello che non cambia sono gli autovalori e il numero di volte che un dato autovalore si ripete sulla diagonale (parte del lavoro è stato svolto nel precedente foglio di esercizi).

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico $\det(A - xI) = (-3 - x)[(-2 - x)(1 - x) + 2] = (-3 - x)(x^2 + x)$ (sviluppando lungo la seconda colonna). Quindi gli autovalori sono $0, -1, -3$, tutti semplici quindi A è diagonalizzabile (osserviamo che si vede "ad occhio" che -3 è autovalore con autovettore e_2 , e che A ha rango 2, quindi 0 è autovalore). L'autospazio $E(0)$ è l'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$, dunque una base è data dal vettore $ue_1 + 2e_3$, ed analogamente $E(-1)$ è dato dalle soluzioni di

$$(A - (-1)I)\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}.$$

Quindi una base è data dal vettore $e_1 + e_3$. In conclusione le matrici cercate sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

Si trovino una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $-x^3 - 3x^2 - 2$, gli autovalori $0, -1, -2$. Le matrici cercate

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1/3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10.

Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3 - 2k & 4k - 4 \\ 1 - k & 2k - 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Soluzione: Il polinomio caratteristico della matrice è $x^2 - x + 2k - 2$. Per $k > 9/8$ le radici sono complesse quindi la matrice non è diagonalizzabile (sui reali). Per $k < 9/8$ il discriminante è positivo, quindi abbiamo due radici distinte e la matrice è diagonalizzabile (molteplicità geometrica ed algebrica uno per entrambi gli autovalori). Bisogna vedere cosa succede per $k = 9/8$ quando abbiamo l'autovalore $1/2$ con molteplicità 2.

La matrice $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ -1/8 & 1/4 \end{pmatrix} - (1/2)I$ ha rango 1 dunque $MG(1/2) = 1$ e la matrice non è diagonalizzabile.

Esercizio 11.

Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^3 con autovalori $2, 1$ ed autospazi

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \right\}, \quad E(1) = L \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(a) è vero che f è diagonalizzabile?

(b) Trovare una base di autovettori per f .

Soluzione: a) Sì, perchè la somma delle dimensioni degli autospazi, cioè la somma delle molteplicità geometriche è 3.

b) Un autovettore per 1 è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, risolvendo l'equazione per $E(2)$ troviamo due soluzioni linearmente indipendenti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; questi tre vettori formano una base di autovettori.

Esercizio 12.

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -4 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e si trovino gli autovalori (con relative molteplicità) e autovettori di A e B . È vero che A e B sono simili?

Soluzione: Il polinomio caratteristico di entrambe le matrici è $-(x-1)^2(x-2)$. Per la matrice A abbiamo $E(1) = L[(1, 2, 1)^t, (2/3, 0, -1)^t]$ mentre $E(2) = L[(0, 1, 1)^t]$. Per B abbiamo $E(1) = L[(1, 2, 1)^t]$, $E(2) = L[(0, 1, 1)^t]$, gli autospazi associati ad 1 hanno molteplicità geometriche differenti (in effetti A è diagonalizzabile, B no) quindi le matrici non sono simili.

Esercizio 13.

Siano A, B matrici simili, $B = M^{-1}AM$

(a) Si mostri che B^n e A^n , $n \in \mathbb{N}$ sono simili

(b) Si calcolino $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^3$, $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^n$

Soluzione: a) Abbiamo $B^n = (M^{-1}AM)^n = M^{-1}AMM^{-1}AM \dots M^{-1}AM$ (dove il fattore $M^{-1}AM$ è ripetuto n volte), cancellando i prodotti MM^{-1} consecutivi abbiamo $B^n = M^{-1}A^nM$ quindi A^n e B^n sono simili e la matrice che realizza la similitudine è M .

b) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ ammette due autovalori: $-6, 8$ con autospazi $E(-6) = L[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ ed $E(8) = L[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$; quindi posto $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ abbiamo $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} M$. Dunque $M \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ e, per quanto visto prima,

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^3 = M \begin{pmatrix} -6^3 & 0 \\ 0 & 8^3 \end{pmatrix} M^{-1} = M \begin{pmatrix} -216 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 148 & 364 \\ 364 & 168 \end{pmatrix}$$

Per la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^n$, procedendo come prima, troviamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}2 & (-1)^{n+1}6 \\ (-1)^n & (-1)^n 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 14.

Si mostri che $f : V \rightarrow V$ non è iniettiva se e solo se il suo polinomio caratteristico è della forma $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x$

Soluzione: Il polinomio caratteristico non ha termine di grado zero se e solo se 0 è una radice se e solo se 0 è un autovalore per f se e solo se esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $f(\underline{v}) = \underline{0}$ se e solo se $\ker f$ contiene vettori non nulli se e solo se f non è iniettiva

Esercizio 15.

Si risponda motivando brevemente la risposta.

- (a) Sia $f : V \rightarrow V$ un operatore lineare con polinomio caratteristico $-x^3 + x^2 + 6x$. Che dimensione ha V ? È vero che f è diagonalizzabile sui reali?

Soluzione: La dimensione di V è pari al grado del polinomio caratteristico, dunque 3. Le radici del polinomio, ovvero gli autovalori di f , sono reali e distinte, il che è condizione sufficiente per la diagonalizzabilità di f .

- (b) Sia f un operatore lineare con polinomio caratteristico $(x-1)(x^2-3x+2)$. È vero che f è suriettivo?

Soluzione: 0 non è autovalore, dunque il nucleo di f è banale e f è un isomorfismo

Esercizio 16.

Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2[x]$ tale che

$$f(1) = 1 + x^2 \quad f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad f(x^2) = 2x^2$$

Si determinino gli autovalori, basi degli autospazi e si dica se f è diagonalizzabile.

Soluzione: la matrice canonica di f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolando il polinomio caratteristico troviamo $p(x) = (1-x)(2-x)^2$. Abbiamo che $A - 2I$ ha rango 1, e risolvendo il sistema omogeneo associato troviamo che $(1, -1, 0)^t, (0, 0, 1)^t$ è una base dello spazio delle soluzioni. Dunque una base di $E(2)$ è formata dai polinomi $1-x, x^2$. Il nucleo di $A - I$ è generato dal vettore $(1, 0, -1)^t$, quindi $E(1) = L[1-x^2]$.

Esercizio 17.

Si consideri la base \mathcal{B} di \mathbb{R}^2 data dai vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si trovino, se esistono, vettori \underline{v} di \mathbb{R}^2 tali che le coordinate di \underline{v} rispetto a \mathcal{B} sono uguali alle coordinate di \underline{v} rispetto alla base canonica.

Soluzione: Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice di passaggio dalla base canonica alla base \mathcal{B} . Allora, se \underline{c} sono le coordinate di un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica (i.e. le sue componenti), e \underline{b} le coordinate di \underline{v} rispetto alla base \mathcal{B} , abbiamo $\underline{c} = M\underline{b}$. Se le coordinate devono essere uguali allora \underline{b} deve essere un autovettore per M associato all'autovalore 1. Il polinomio caratteristico di M è $x^2 - 6x + 5$ che ammette come radice 1, e si trova $E(1) = L\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$. In effetti verifichiamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, e tutti i vettori di $E(1)$ hanno le stesse coordinate rispetto alle due basi.

Esercizio 18.

Sia $V \subset \text{Mat}(2)$ il sottospazio delle matrici aventi traccia nulla, con base $\mathcal{B} = \{A = E_2, B =$

$E_3, C = E_1 - E_4\}$, dove E_i è l' i -esima matrice della base canonica. Per $h \in \mathbb{R}$, sia $f_h : V \rightarrow V$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f_h(A+B) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix} \quad f_h(2B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad f_h(A-B+C) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di f_h rispetto alla base $\{A, B, C\}$

Soluzione: Rispetto alla base formata dalle matrici $A+B, 2B+C, A-B+C$, le coordinate di A sono $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^t$, quelle di B sono $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^t$ e quelle di C sono $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$. In questo modo possiamo calcolare $f_h(A), f_h(B), f_h(C)$ e scrivere le coordinate di queste matrici rispetto alla base $\{A, B, C\}$ ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Trovare per quali valori di h l'endomorfismo è diagonalizzabile.

Soluzione: Il polinomio caratteristico della matrice trovata al punto precedente è $(1-x)(x^2-3x-2h)$. Se $h > -9/8$ questo ammette due radici distinte $\frac{3 \pm \sqrt{9+8h}}{2}$, se $h \neq -1$ nessuna delle due è 1 quindi abbiamo tre autovalori distinti e f_h è diagonalizzabile. Se $h = -1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2, ma anche molteplicità geometrica 2 quindi anche in questo caso f_h è diagonalizzabile. Se $h = -9/8$, abbiamo $MA(\frac{3}{2}) = 2$, ma la molteplicità geometrica è solo 1, quindi $f_{-9/8}$ non è diagonalizzabile. In conclusione f_h è diagonalizzabile per $h > -\frac{9}{8}$

Esercizio 19.

Se r è una retta per l'origine del piano, che identifichiamo con \mathbb{R}^2 , la riflessione in r manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto a r . Se \underline{u}_1 è un vettore che giace in r e \underline{u}_2 un vettore che giace sulla perpendicolare a r per l'origine, rispetto alla base formata da questi due vettori la matrice della riflessione è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in quanto r resta fissa e la retta ortogonale cambia verso.

(a) Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta $r : x - y = 0$

(b) Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta $r : ax + by = 0$ (si assuma $a \neq 0, b \neq 0$)

Soluzione: La retta ortogonale a r per l'origine è la retta $r^\perp : bx - ay = 0$ infatti il coefficiente angolare di r è $-\frac{a}{b}$, quello di r^\perp è $\frac{b}{a}$. Un vettore che giace su r è un vettore con vertice appartenente a r (e punto di applicazione l'origine), quindi possiamo prendere il vettore $(-b, a)^t \subset r$, $(a, b)^t \subset r^\perp$. Rispetto a questa base la matrice della riflessione è la matrice D . La matrice di passaggio dalla base canonica alla base formata dai due vettori è $(M = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix})$ e, se A è la matrice canonica, $D = M^{-1}AM$, dunque

$$A = MDM^{-1} = -\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 20.

Sia $f : V \rightarrow V$ una proiezione, ovvero un endomorfismo tale che $f^2 = f \circ f = f$.

(a) Si dimostri che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f allora $\lambda \in \{0, 1\}$.

Soluzione: Se λ è autovalore, $\underline{v} \neq \underline{0}$ autovettore, $f^2(\underline{v}) = f(f(\underline{v})) = f(\lambda \underline{v}) = \lambda^2 \underline{v}$. D'altra parte $f^2(\underline{v}) = f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

Quindi poichè $\underline{v} \neq \underline{0}$ deve essere $\lambda = \lambda^2$ e dunque λ può essere solo 0 oppure 1.

(b) Si mostri che f è diagonalizzabile. (Suggerimento: usare che anche $Id - f$ è una proiezione).

Soluzione: Poichè $\underline{v} = f(\underline{v}) + (Id - f)(\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ $V = \text{Im } f + \text{Im}(Id - f)$. La somma è diretta poichè se \underline{w} appartiene all'intersezione, $\underline{w} = f(\underline{u}_1) = (Id - f)(\underline{u}_2)$ da cui $\underline{u}_2 = f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)$. Applicando f ad ambo i membri e usando il fatto che $f^2 = f$ si ha $f(\underline{u}_1) = \underline{0}$ dunque $\underline{w} = \underline{0}$. Allora abbiamo che

$$n = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im}(Id - f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im } f)$$

ossia $\dim(\text{Im}(Id - f)) = \dim(\text{Ker}(f))$ e dunque $n = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(Id - f))$. I due nuclei sono gli autospazi $E(0)$ ed $E(1)$ dunque per il primo criterio f è diagonalizzabile. Alternativamente, e in maniera molto più semplice, osserviamo che $\text{Im } f \subseteq E(1)$ poichè se $\underline{v} = f(\underline{u})$ allora $f(\underline{v}) = f^2(\underline{u}) = f(\underline{u}) = \underline{v}$. Ovviamente $E(1)$ è sottospazio dell'immagine dunque $\text{Im } f = E(1)$ e

$$n = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(E(0)) + \dim(E(1))$$