Geometria BETR
Foglio esercizi 6

Esercizio 1.

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$E = L[\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}] \quad F = L[\underline{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix}3\\7\\1\\-1\end{pmatrix}].$$

Si trovi una base di $E \cap F$.

Esercizio 2.

Si considerino i sottospazi $E = \mathrm{Sol}(2x - y - z - w = 0)$, $F = L[\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}]$.

(a) Si scriva F come spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.

(b) Si trovi una base di $E \cap F$

Esercizio 3.

Si consideri il sottospazio $U = L[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\\1\end{pmatrix}]$.

(a) Si scriva un sistema S t.c. $U = \mathrm{Sol}(S)$.

(b) Si trovi un sottospazio W tale che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Esercizio 4.

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = L[\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}] \qquad V = L[\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}]$$

Si trovino delle basi dei sottospazi $U, V, U \cap V, U + V$.

Esercizio 5.

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\\1\end{pmatrix}] \qquad V = L[\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}]$$

Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$ e una base dell'intersezione.

Esercizio 6.

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$

$$U = \text{Sol}\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \\ z+t+u=0 \end{cases} \qquad V = L[(1,1,1,1,1)^t, (2,2,2,5,-1)^t]$$

(a) Si trovino delle basi di $U \cap V$ e $U+V$.

(b) Si completi la base di $E+F$ trovata ad una base di $\mathbb{R}^5$

Esercizio 7.

Si considerino i sottospazi (dipendenti da un parametro k)

$$E_k = L[(1,0,0,0)^t, (0,2,k,1)^t], \quad F_k = L[(0,k,2,0)^t, (0,0,0,1)^t]$$

Si trovi una base di $E_k \cap F_k$ al variare di k

Esercizio 8.

Siano $U \in \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x-y-z+w=0$, W il sottospazio generato dai vettori

$$(1,-1,0,0)^t,\ (2,-1,-1,0)^t,\ (2,-2,1,-1)^t$$

a) Si trovi una base di $U \cap W$, una base di $U+W$ e le equazioni cartesiane di W (questa parte è stata svolta in classe)

b) Si scriva, se possibile, il vettore $(3,2,1,0)^t$ in due modi diversi +come somma di un vettore in U e uno in W.

Esercizio 9.

Siano E, F sottospazi di $\mathbb{R}^5$ rispettivamente di dimensione $3,4$. Che valori può assumere la dimensione di $E \cap F$?

Esercizio 10.

Consideriamo dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ di uno spazio vettoriale V. Sapendo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono linearmente indipendenti, e $\underline{w}_3 + 2\underline{v}_1 = \underline{v}_2$, torvare una base di $L[\underline{v}_1, \underline{v}_2] \cap L[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]$ e di $L[\underline{v}_1, \underline{v}_2] + L[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]$

Esercizio 11.

Date le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che formano una base dello spazio delle matrici due per due e si scrivano le coordinate dela matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

risprtto a questa base.

Esercizio 12.

Nei polinomi in x di grado al più 3, $R^4[x]$ consideriamo i sottospazi

$$U = \{p(x) |\, p(1) = 0\} \qquad W = \{p(x) |\, p(-1) = 0\}$$

Si trovino basi di $U, W, U \cap W, U+W$.

Esercizio 13.

Si Considerino i sottoinsiemi T_1, T_2 di $\mathrm{Mat}(n \times n)$ formati rispettivamente dalle matrici triangolari superiori e inferiori.

(a) Si dimostri che T_1 e T_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(n \times n)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si trovino $T_1 + T_2$ e $T_1 \cap T_2$.

(c) si scriva la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ come somma di una matrice triangolare superiore ed una matrice triangolare inferiore in due modi diversi.

Esercizio 14.

Sia $V = C(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dai reali ai reali. Si considerino i sottoinsiemi E formato dalle funzioni pari, ossia quelle per le quali $f(x) = f(-x) \, \forall x \in \mathbb{R}$, e quello delle funzioni dispari $F := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$. Verificare che E, F sono sottospazi e che $V = E \oplus F$

Esercizio 15.

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) si verifichi che formano una base $\mathcal{B}$ dello spazio delle matrici due per due

(b) Si scriva la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$

(c) Si scriva la matrice generica $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ come combinazione lineare delle matrici di $\mathcal{B}$

Esercizio 16.

Given the following subspaces of $\mathbb{R}^3$:

$$U = L[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}] \qquad V = L[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}]$$

Find bases for $U, V, U \cap V, U + V$.