Geometria BETR
Foglio esercizi 6

Esercizio 1.

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$E = L[\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}] \quad F = L[\underline{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix}3\\7\\1\\-1\end{pmatrix}].$$

Si trovi una base di $E \cap F$.

Soluzione: Osserviamo che $\underline{w}_3 = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$, dunque $F = L[\underline{w}_1, \underline{w}_2]$. I vettori dell'intersezione si scrivono dunque sia come combinazione lineare dei vettori della base di E che come combinazione lineare dei vettori duella base di F. dunque $E \cap F \ni \underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = z\underline{w}_1 + t\underline{w}_2$ da cui $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 - z\underline{w}_1 - t\underline{w}_2 = \underline{0}$. Scrivendo il sistema

$$S : \begin{cases} x - z - 2t = \\ 2x + y - 3z - 4t = 0 \\ -y - t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\{\begin{pmatrix}s\\-s\\s\\-s\end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}\}$ *troviamo* $E \cap F = \mathrm{Sol}(S) = L[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}]$.

Esercizio 2.

Si considerino i sottospazi $E = \mathrm{Sol}(2x - y - z - w = 0)$, $F = L[\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}]$.

(a) Si scriva F come spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.

(b) Si trovi una base di $E \cap F$

Soluzione: a) *Consideriamo la matrice* $\begin{pmatrix}2 & 1 & x\\-1 & -1 & y\\-1 & 0 & z\\0 & 0 & w\end{pmatrix}$; *euguagliando a zero i due orlati* $\mu_{123,123}, \mu_{124,123}$ *del minore* $\mu_{12,12}$ *(per esempio) troviamo il sistema* $\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -w = 0 \end{cases}$ *(possiamo controllare di aver fatto bene i conti verificando che i due vettori della base data per F sono soluzioni).*

b) *Visto che nella parte a) abbiamo trovato un sistema le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di F, i vettori dell' intersezione saranno tutti e soli quelli che soddisfano questo sistema e l'quazione data per E ovvero le soluzioni di*

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -w = 0 \\ 2x - y - z - w = 0 \end{cases}$$

Quindi $E \cap F = L[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}]$.

Esercizio 3.

Si consideri il sottospazio $U = L[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\\1\end{pmatrix}]$.

(a) Si scriva un sistema S t.c. $U = \mathrm{Sol}(S)$.

(b) Si trovi un sottospazio W tale che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Soluzione: a) $\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

b) *Basta trovare tre vettori che insieme ai due dati formino una base di $\mathbb{R}^5$ e considerare il sottospazio generato da questi tre vettori. Ad esempio possiamo prendere i vettori della base canonica di R^5 $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ e porre $W = L[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]$.*

Esercizio 4.

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = L[\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}] \qquad V = L[\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}]$$

Si trovino delle basi dei sottospazi $U, V, U \cap V, U + V$.

Soluzione: Una base di U è costituita dai primi due generatori dati, visto che il terzo è combinazione lineare dei primi due. I generatori dati per V sono linearmente indipendenti quindi formano una base di V. Risolvendo il sistema

$$x\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

troviamo $x = -(4/3)t, y = -6t, z = t, w = -(7/3)t$, dunque una base di $U \cap V$ è data dal vettore $\begin{pmatrix}4/3\\10\\6\end{pmatrix}$.

Infine notiamo che $U + V = \mathbb{R}^3$, quindi una base è (per esempio) la base canonica.

Esercizio 5.

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\\1\end{pmatrix}] \qquad V = L[\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}]$$

Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$ e una base dell'intersezione.

Soluzione: Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ i generatori di U (nell'ordine). Si vede che $\mathrm{Mat}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ ha rango 2, quindi una base è data (per esempio) da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ che sono linearmente indipendenti. I generatori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ di V sono linearmente indipendenti quindi formano una base. Per trovare una base dell'intersezione si può risolvere il sistema $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = z\underline{w}_1 + t\underline{w}_2$. Però se si prende come base di V la coppia di vettori $\underline{w}_1, \underline{w}'_2 = \frac{1}{2}(\underline{w}_2 - \underline{w}_1)$ si vede facilmente che $\underline{w}_1 + \underline{v}_1 = 2\underline{w}'_2$, dunque $\underline{v}_1 = 2\underline{w}'_2 - \underline{w}_1 \in U \cap V$. La matrice $\mathrm{Mat}(\underline{w}_1, \underline{w}'_2, \underline{v}_2)$ ha rango 3, dunque la dimensione della somma è 3, il sottospazio intersezione ha dimensione 1 ed è generato da $\underline{v}_1$.

Esercizio 6.

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$

$$U = \mathrm{Sol}\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \\ z+t+u=0 \end{cases} \qquad V = L[(1,1,1,1,1)^t, (2,2,2,5,-1)^t]$$

(a) Si trovino delle basi di $U \cap V$ e $U+V$.

Soluzione: L'intersezione è generata da $(0,0,0,1,-1)^t$, la somma ha dimensione 3 per la formula di Grassmann ed una base è data (per esempio) da $(0,0,1,-1,0)^t$, $(0,0,1,0,-1)^t$, $(1,1,1,1,1)$

(b) Si completi la base di $E+F$ trovata ad una base di $\mathbb{R}^5$

Soluzione: si possono aggiungere (per esempio) $\underline{e}_5, \underline{e}_1$.

Esercizio 7.

Si considerino i sottospazi (dipendenti da un parametro k)

$$E_k = L[(1,0,0,0)^t, (0,2,k,1)^t], \quad F_k = L[(0,k,2,0)^t, (0,0,0,1)^t]$$

Si trovi una base di $E_k \cap F_k$ al variare di k

Soluzione: Se $k \neq 2, -2$ il rango della matrice formata dai quattro vettori è 4 dunque i vettori sono linearmente indipendenti e l'intersezione è il sottospazio banale. Per $k = \pm 2$ l'intersezione è generata da $(0, 2, k, 1)$.

Esercizio 8.

Siano $U \in \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x - y - z + w = 0$, W il sottospazio generato dai vettori

$$(1,-1,0,0)^t,\ (2,-1,-1,0)^t,\ (2,-2,1,-1)^t$$

a) Si trovi una base di $U \cap W$, una base di $U+W$ e le equazioni cartesiane di W (questa parte è stata svolta in classe)

Soluzione: **Primo metodo:** *(aka fritto misto): il vettore generico di W è la combinazione lineare dei tre vettori della base di W che indichiamo con $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ e $\underline{w}_3$.*

$$r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}r+2s+2t\\-r-s-2t\\t-s\\-t\end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione cartesiana di U, otteniamo che affinchè il vettore generico di W soddisfi l'equazione e quindi appartenga a U si deve avere $3r + 6s + 4t = 0$. Allora (ad esempio) i vettori $\underline{w}_2 - \frac{3}{2}\underline{w}_3$, $\underline{w}_1 - \frac{3}{4}\underline{w}_3$ sono vettori di W che soddisfano l'equazione di U quindi appartengono all'intersezione.

Secondo metodo: *Calcoliamo un'equazione cartesiana per W, tanto è anche richiesto dalla domanda, quindi non faccio lavoro inutile:*

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & x\\ -1 & -1 & -2 & y\\ 0 & -1 & 1 & z\\ 0 & 0 & -1 & w\end{pmatrix} = x+y+z+w$$

Risolvendo il sistema costituito dall'equazione cartesiana di U e da quella di W si trova una base dell'intersezione.

Metodo 3: *In questo caso è il più lungo e complicato. Trovo una base di* U*, ad esempio* $\underline{u}_1 = (0,1,-1,0)^t, \underline{u}_2 = (0,0,1,1)^t, \underline{u}_3 = (1,0,0,-2)^t$ *e imponendo* $x_1\underline{w}_1+x_2\underline{w}_2+x_3\underline{w}_3 = y_1\underline{u}_1+y_2\underline{u}_2+y_3\underline{u}_3$ *trovo il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_3 - x_2 = y_2 - y_1 \\ -x_3 = y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

ogni soluzione $(\underline{x}, \underline{y})$ *è un vettore di* $\mathbb{R}^6$*, che abbiamo scritto come una coppia di vettori di* $\mathbb{R}^3$ *perchè rappresenta le coordinate di un vettore dell'intersezione rispetto alla base di* W *(il vettore* $\underline{x}$*) e rispetto alla base di* U *(il vettore* $\underline{y}$*). Due soluzioni linearmente indipendenti le ricaviamo dai vettori trovati con il primo metodo:*

$$((0,1,-\frac{3}{2}),(2,-\frac{1}{2},-1)),\ ((1,0,-\frac{3}{4}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{3}))$$

che corrispondono ad una base di $U \cap W$ *data dai vettori* $\underline{w}_2 - \frac{3}{2}\underline{w}_3 = 2\underline{u}_1 - \frac{1}{2}\underline{u}_2 - \underline{u}_3$ *e* $\underline{w}_1 - \frac{3}{4}\underline{w}_3 = \frac{1}{2}\underline{u}_1 - \frac{1}{4}\underline{u}_2 - \frac{1}{2}\underline{u}_3$.

b) Si scriva, se possibile, il vettore $(3,2,1,0)^t$ in due modi diversi +come somma di un vettore in U e uno in W.

Soluzione: è possibile perché l'intersezione é non vuota. Una base di U *ottenuta estendendo la base dell'intersezione è* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u} = (0,1,0,1)^t$*, una di* W *ottenuta allo stesso modo è* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w} = (1,-1,0,0)^t$*.Siccome* $U + W = \mathbb{R}^4$ *abbiamo che i vettori* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u}.\underline{w}$ *formano una base di* $\mathbb{R}^4$*. Calcoliamo le coordinate di* $(3,2,1,0)^t$ *rispetto a questa base e troviamo*

$$(3,2,1,0)^t = (-\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 3\underline{u}) + \underline{w} = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{w} + (\underline{u})$$

dove gli addendi tra parentesi sono un vettore in U*, quelli fuori uno in* W*.*
Metodo alternativo (secondo me più faticoso): Date $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ *base di* U *e* $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ *base di* W *scrivere* $(3,2,1,0)^t$ *come somma di un elemento di* U *e uno di* W *significa trovare soluzioni del sistema*

$$x_1\underline{u}_1 + x_2\underline{x}_2 + x_3\underline{u}_3 + y_1\underline{w}_1 + y_2\underline{w}_2 + y_3\underline{w}_3 = (3,2,1,0)^t.$$

Questo è un sistema di quattro equazioni in sei incognite, la matrice dei coefficienti ha rango 4 *poichè* $U + W = \mathbb{R}^4$ *dunque almeno quattro colonne sono linearmente indipendenti, dunque ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri. Ciascuna di queste è un modo diverso di scrivere* $(3,2,1,0)^t$ *come somma di un vettore di* U *e uno di* W*.*

Esercizio 9.

Siano E, F sottospazi di $\mathbb{R}^5$ rispettivamente di dimensione $3, 4$. Che valori può assumere la dimensione di $E \cap F$?

Soluzione: per la formula di Grassmann la dimensione deve essere almeno 2; se $E \subseteq F$ *la dimensione deve essere* 3*. Poichè* $E \cap F \subseteq F$ *questo è il valore massimo.*

Esercizio 10.

Consideriamo dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ di uno spazio vettoriale V. Sapendo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono linearmente indipendenti, e $\underline{w}_3 + 2\underline{v}_1 = \underline{v}_2$, torvare una base di $L[\underline{v}_1, \underline{v}_2] \cap L[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]$ e di $L[\underline{v}_1, \underline{v}_2] + L[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]$

Soluzione: $\underline{w}_3 = \underline{v}_2 - 2\underline{v}_1$ *quindi genera l'intersezione, visto che gli altri quattro vettori sono linearmente indipendenti e dunque formano una base della somma.*

Esercizio 11.

Date le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che formano una base dello spazio delle matrici due per due e si scrivano le coordinate dela matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

risprtto a questa base.

Soluzione: Le coordinate delle matrici rispetto alla base canonica dello spazio delle matrici sono date dai vettori $\underline{v}_1 = (1,2,-1,0)^t, \underline{v}_2 = (0,3,-1,-2)^t, \underline{v}_3 = (1,-1,0,1)^t, \underline{v}_4 = (3,2,-1,1)^t$. *Posto* $B = \mathrm{Mat}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$ *abbiamo che il determinante di* B *è* 2, *quindi la matrice delle coordinate ha rango massimo e le matrici sono linearmente indipendenti dunque formano una base. Risolvendo il sistema* $B\underline{x} = (2,-1,-1,2)^t$ *troviamo che le coordinate sono* $(2,0,3,-1)$

Esercizio 12.

Nei polinomi in x di grado al più 3, $R^4[x]$ consideriamo i sottospazi

$$U = \{p(x) |\, p(1) = 0\} \qquad W = \{p(x) |\, p(-1) = 0\}$$

Si trovino basi di $U, W, U \cap W, U + W$.

Soluzione: Posto $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ *i coefficienti di un polinomio di* U *devono soddisfare* $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, *quelli di* W $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$. *Quindi* U, W *hanno dimensione tre, essendo soluzioni un' equazione in quattro incognite. Analogamente* $U \cap W$ *ha dimensione* 2 *visto che i coefficienti dei suoi polinomi devono soddisare entrambe le equazioni. Per la formula di Grassmann quindi* $U + W$ *ha dimensione* 4 *e coincide con* $\mathbb{R}^4[x]$, *una base dunque è la base canonica di questo spazio. I polinomi* $(x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$ *(ad esempio) chiaramente appartengono a* U *e sono linearmente indipendenti, quindi formano, una base di* U, *e in modo analogo* $x+1, x(x+1), x^2(x+1)$ *sono base di* W. *I polinomi dell'intersezione devono annullarsi in entrambi i punti, dunque* $(x+1)(x-1), x(x^2-1)$ *formano una base.*

Esercizio 13.

Si Considerino i sottoinsiemi T_1, T_2 di $\mathrm{Mat}(n \times n)$ formati rispettivamente dalle matrici triangolari superiori e inferiori.

(a) Si dimostri che T_1 e T_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(n \times n)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si trovino $T_1 + T_2$ e $T_1 \cap T_2$.

(c) si scriva la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ come somma di una matrice triangolare superiore ed una matrice triangolare inferiore in due modi diversi.

Soluzione: a) *La dimensione di entrambi è* $n(n+1)/2$.

b) *)* $T_1 + T_2 = \mathrm{Mat}(n \times n)$, *e* $T_1 \cap T_2$ *sone le matrici* $n \times n$ *diagonali (si noti Grassmann* $n(n+1)/2 + n(n+1)/2 = n^2 + n$*).*

c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.

Esercizio 14.

Sia $V = C(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dai reali ai reali. Si considerino i sottoinsiemi E formato dalle funzioni pari, ossia quelle per le quali $f(x) = f(-x)\, \forall x \in \mathbb{R}$, e quello delle funzioni dispari $F := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$. Verificare che E, F sono sottospazi e che $V = E \oplus F$

Soluzione: Sono sottospazi in quanto sono chiusi rispetto alle operazioni e contengono la funzione costante nulla che è l'unica funzione sia pari che dispari ($f(x) = f(-x) = -f(x)\, \forall x \in \mathbb{R}$*), dunque* $E \cap F = \{\underline{0}\}$. *inoltre ogni funzione si scrive (in modo unico)* $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. *La prima frazione è una funzione pari, la seconda dispari.*

Esercizio 15.

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) si verifichi che formano una base $\mathcal{B}$ dello spazio delle matrici due per due

Soluzione: La matrice 4×4 M *con colonne le coordinate di* A, B, C, D *rispetto alla base canonica è invertibile*

(b) Si scriva la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$

Soluzione: è la matrice M *del punto precedente*

(c) Si scriva la matrice generica $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ come combinazione lineare delle matrici di $\mathcal{B}$

Soluzione: $(a+b-2c)A+(c-d)B+(c+d-b)C+(c-a)D$ *(la matrice inversa ha righe* $(1,1,-2,0), (0,0,1,-1), (0,-1,1$