Geometria BETR
Foglio esercizi 5

Esercizio 1.
Si considerino i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \underline{v}_2 = (1, 1, 1), \underline{v}_3 = (0, 1, 1), \underline{v}_4 = (0, 1, 0)$

(a) Estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ da questi vettori

(b) Scrivere una combinazione lineare $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$ con almeno un coefficiente $a_i \neq 0$

(c) Scrivere il vettore $(1, 1, 0)$ in due modi diversi come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$

Esercizio 2.
Si dimostri che se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ sono basi di uno spazio vettoriale V le matrici di passaggio verificano

$$_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_3} = {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2}\, {}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_3}$$

Esercizio 3.
Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Trovare le matrici di passaggio ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_1}$, ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_2}$, $\mathcal{B}_2M_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_1}$

(b) trovare le coordinate del generico vettore colonna $(a, b, c)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 4.
Consideriamo la base canonica dello spazio dei polinomi $\mathbb{R}^2[x]$ data dai monomi $1, x, x^2$ e i tre polinomi $p_1(x) = 2 + 2x + x^2, p_2(x) = -2 + x + 2x^2, p_3(x) = 1 - 2x + 2x^2$.

(a) Si mostri che p_1, p_2, p_3 sono linearmente indipendenti.

(b) Si scriva la matrice di passaggio dalla base canonica a questa base.

Esercizio 5.
Sia U lo spazio generato da $\underline{v}_1 = (1, 2, 2, 0), \underline{v}_2 = (1, 0, 0, 1)\underline{v}_3 = (0, 4, 2, 0), \underline{v}_4 = (1, 2, 1, 1)$.

(a) Si mostri che la dimensione di U è 3

(b) Si trovino due basi di U diverse e che non differiscano solo per l'ordine dei vettori.

(c) Si scriva la matrice di passaggio tra queste basi

Esercizio 6.
Dati i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 1, 1), \underline{v}_2 = (1, 2, 2, 0)$ estendere l'insieme da essi formato ad una base di tutto $\mathbb{R}^4$ aggiungendo due vettori.

Esercizio 7.
Siano $E, F \subseteq V$ sottospazi di uno spazio vettoriale V.

(a) Si dimostri che $E \cap F$ è un sottospazio di V.

(b) Si dimostri con un controesempio che $E \cup F$ non è un sottospazio.

Esercizio 8.

Sia V l'insieme $\{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, definiamo le seguenti operazioni su V:

$$q \oplus r = qr; \quad q \odot r = r^q$$

Verificare se V con queste operazioni sia uno spazio vettoriale.

Esercizio 9.

Si dimostri che se V è uno spazio vettoriale finitamente generato, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base di V un insieme di vettori $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ genera V se e solo se le coordinate dei $\underline{v}_i$ rispetto a $\mathcal{B}$ generano R^n (*suggerimento: la dimostrazione è simile a quella vista in classe per dimostrare che i* $\underline{v}_i$ *sono indipendenti se e solo se le loro coordinate lo sono.*)