Geometria BETR
Foglio esercizi 5

Esercizio 1.

Si considerino i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \underline{v}_2 = (1, 1, 1), \underline{v}_3 = (0, 1, 1), \underline{v}_4 = (0, 1, 0)$

(a) Estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ da questi vettori

(b) Scrivere una combinazione lineare $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$ con almeno un coefficiente $a_i \neq 0$

(c) Scrivere il vettore $(1, 1, 0)$ in due modi diversi come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$

Soluzione: Per (a) basta prendere tre vettori in modo che la matrice con colonne (o righe) quei vettori abbia determinante non nullo, ad esempio $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$.
Per (b), visto che i tre vettori scelti formano una base di $\mathbb{R}^3$ *scriviamo l'altro vettore come combinazione lineare dei tre; in questo caso* $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3 - \underline{v}_4$*, dunque* $\underline{0} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3 + \underline{v}_4$.
Per (c) Scriviamo $(1, 0, 0)$ *come combinazione lineare dei vettori scelti per la base e aggiungiamo* 0 *volte il quarto vettore, in questo caso* $(1, 1, 0) = 0\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 + \underline{v}_4$*. Questo ci dà il primo modo, aggiungiamo a questa combinazione lineare quella per* $\underline{0}$ *trovata sopra, e otteniamo*

$$(1, 1, 0) = 0\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 + \underline{v}_4 + \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3 + \underline{v}_4 = \underline{v}_1 - 3\underline{v}_3 + 2\underline{v}_4.$$

Esercizio 2.

Si dimostri che se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ sono basi di uno spazio vettoriale V le matrici di passaggio verificano

$${}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_3} = {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2}\,{}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_3}$$

Soluzione: Denotiamo con $\underline{u}_i, \underline{v}_i$ *e* $\underline{w}_i$ *i vettori delle tre basi, allora*

$$(\underline{w}_1, \dots \underline{w}_n) = (\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n)\,{}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_3} \qquad \text{e} \qquad (\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n) = (\underline{u}_1, \dots \underline{u}_n)\,{}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2}.$$

Sostituendo abbiamo $(\underline{w}_1, \dots \underline{w}_n) = (\underline{u}_1, \dots \underline{u}_n)\,{}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2}\,{}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_3}$*. Questo significa che le coordinate dei vettori* $\underline{w}_i$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}_1$ *sono le colonne della matrice* ${}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2}\,{}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_3}$ *che quindi è per definizione* ${}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_3}$

Esercizio 3.

Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Trovare le matrici di passaggio ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_1}$, ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_2}$, $\mathcal{B}_2M_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_1}$

(b) trovare le coordinate del generico vettore colonna $(a, b, c)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$.

Soluzione: Le prime due sono semplicemente le matrici con colonne i vettori delle rispettive basi. Se denotiamo $\underline{e}_i$ *i vettori della base canonica e* $\underline{v}_i$ *i vettori di* $\mathcal{B}_2$ *troviamo le relazioni*

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 1\underline{v}_3 \\ \underline{e}_2 = 0\underline{v}1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 \\ \underline{e}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 \end{cases} .$$

La matrice cercata quindi è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare ${}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{C}}\,{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_2}$ *e le coordinate di* $(a, b, c)^t$ *moltiplicando*

$${}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.

Consideriamo la base canonica dello spazio dei polinomi $\mathbb{R}^2[x]$ data dai monomi $1, x, x^2$ e i tre polinomi $p_1(x) = 2 + 2x + x^2, p_2(x) = -2 + x + 2x^2, p_3(x) = 1 - 2x + 2x^2$.

(a) Si mostri che p_1, p_2, p_3 sono linearmente indipendenti.

(b) Si scriva la matrice di passaggio dalla base canonica a questa base.

Soluzione: Le coordinate dei polinomi rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ *sono i vettori della base* $\mathcal{B}_1$ *dell'esercizio precedente, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti dunque una base dello spazio che ha dimensione* 3*. Anche la matrice è quella trovata nell'esercizio precedente. (Attenzione! Non è una matrice con coefficienti dei polinomi).*

Esercizio 5.

Sia U lo spazio generato da $\underline{v}_1 = (1, 2, 2, 0), \underline{v}_2 = (1, 0, 0, 1)\underline{v}_3 = (0, 4, 2, 0), \underline{v}_4 = (1, 2, 1, 1)$.

(a) Si mostri che la dimensione di U è 3

(b) Si trovino due basi di U diverse e che non differiscano solo per l'ordine dei vettori.

(c) Si scriva la matrice di passaggio tra queste basi

Soluzione: Abbiamo che $\underline{v}_4 = \underline{v}_2 + \frac{1}{2}\underline{v}_3$*. La dimensioone è* 3 *poichè* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ *sono linearmente indipendenti. Ogni base deve contenere* $\underline{v}_1$ *poichè non dipende linearmente dagli altri tre, possiamo scegliere quindi come seconda base* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$*. La matrice di passaggio dalla prima alla seconda base è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Visto che i primi vettori delle due basi sono gli stessi il terzo della seconda base è $\underline{v}_4 = \underline{v}_2 + \frac{1}{2}\underline{v}_3$

Esercizio 6.

Dati i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 1, 1), \underline{v}_2 = (1, 2, 2, 0)$ estendere l'insieme da essi formato ad una base di tutto $\mathbb{R}^4$ aggiungendo due vettori.

Soluzione: Si possono aggiungere i primi due vettori della base canonica

Esercizio 7.

Siano $E, F \subseteq V$ sottospazi di uno spazio vettoriale V.

(a) Si dimostri che $E \cap F$ è un sottospazio di V.

(b) Si dimostri con un controesempio che $E \cup F$ non è un sottospazio.

Soluzione: a) *Sicuramente* $\underline{0} \in E \cap F$, *poichè se* E *ed* F *sono sottospazi entrambi contengono il vettore nullo. Inoltre, se* $\underline{u}, \underline{v} \in E \cap F$, *allora* $\underline{u}, \underline{v} \in E$, $\underline{u}, \underline{v} \in F$ *dunque , sempre poich'e* E, F *sono sottospazi* $\underline{u} + \underline{v} \in E$ *e* $\underline{u} + \underline{v} \in F$, *dunque* $\underline{u} + \underline{v} \in E \cap F$. *In modo analogo un multiplo di un vettore di* $E \cap F$ *è un multiplo di un vettore in* E, *quindi contenuto in* E *ed anche multiplo di un vettore in* F, *dunque contenuto in* F, *dunque appartenente a* $E \cap F$. b) *Ad esempio, se* $\underline{u}, \underline{v}$ *sono linearmente indipendenti* $L[\underline{u}] \cup L[\underline{v}]$ *non è sottospazio visto che non contiene* $\underline{u} + \underline{v}$. *(Si pensi all'unione dei due assi cartesiani in* $\mathbb{R}^2$*).*

Esercizio 8.

Sia V l'insieme $\{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, definiamo le seguenti operazioni su V:

$$q \oplus r = qr; \quad q \odot r = r^q$$

Verificare se V con queste operazioni sia uno spazio vettoriale.

Soluzione: Le operazioni sono ben definite (il prodotto di due numeri reali strettamente positivi è strettamente positivo, e anche qualsiasi potenza di un reale strettamente positivo é strettamente positiva). L'operazione $\oplus$ *è chiaramente associativa e commutativa (la moltiplicazione dei reali lo è); l'elemento neutro* $\underline{0}$ *è* 1, *e l'inverso di* r *rispetto a* $\oplus$ *é* $\frac{1}{r}$ *che esiste sempre visto che* $r > 0$ *per ogni* $r \in V$. *Inoltre* $1 \odot r = r$ *per ogni* r, $p \odot (q \oplus r) = (qr)^p = q^p r^p = p \odot q \oplus p \odot r$ *e* $(p+q) \odot r = r^{p+q} = r^p r^q = p \odot r \oplus q \odot r$. *Infine* $(pq) \odot r = r^{pq} = r^{qp} = (r^q)^p = p \odot (q \odot r)$

Esercizio 9.

Si dimostri che se V è uno spazio vettoriale finitamente generato, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base di V un insieme di vettori $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ genera V se e solo se le coordinate dei $\underline{v}_i$ rispetto a $\mathcal{B}$ generano R^n (*suggerimento: la dimostrazione è simile a quella vista in classe per dimostrare che i* $\underline{v}_i$ *sono indipendenti se e solo se le loro coordinate lo sono.*)

Soluzione: Come visto in classe, scrivendouna generica combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ *e sostituendo a ciascun* $\underline{v}_i$ *la sua espressione come combinazione lineare degli elementi della base* $\mathcal{B}$ *otteniamo le uguaglianze (utilizzando la notazione matriciale e ponendo* A *uguale alla matrice* $n \times k$ *le cui colonne sono le coordinate dei* $\underline{v}_i$ *in modo da avere* $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A)$*)*

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{\alpha} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{\alpha} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)\underline{b} = b_1 \underline{u}_1 + \ldots + b_n \underline{u}_n$$

dove si è posto $\underline{b} = A\underline{\alpha}$. *A questo punto supponiamo che le colonne di* A *generino* $\mathbb{R}^n$ *sia* $\underline{w} \in V$ *un vettore qualsiasi. Poichè* $\mathcal{B}$ *è una base, avremo* $\underline{w} = c_1 \underline{u}_1 + \cdots + c_n \underline{u}_n$. *Indichiamo con* $\underline{c} \in R^n$ *il vettore delle coordinate di* $\underline{w}$ *rispetto a* $\mathcal{B}$. *Poichè le colonne di* A *generano, esiste* $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)^t$ *tale che* $A\underline{\gamma} = \underline{c}$. *Dunque*

$$\underline{w} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)\underline{c} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{\gamma} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{\gamma} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \ldots + \underline{\gamma}_k \underline{u}_k$$

Dunque $\underline{w}$ *è combinazione lineare dei* $\underline{v}_i$ *che quindi generano* V.

Viceversa, supponiamo che i $\underline{v}_i$ *generino* V, *vogliamo far vedere che qualsiasi vettore* $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ *è combinazione lineare delle colonne di* A*; questo equivale a dire che il sistema* $A\underline{x} = \underline{d}$ *ammette una soluzione. poniamo* $\underline{z} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)\underline{d}$, *poichè i* $\underline{v}_i$ *generano , esiste una combinazione lineare con coefficienti* $\delta \in \mathbb{R}^k$ *tale che* $\underline{z} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{\delta}$. *Allora*

$$\underline{z} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{\delta} = \underline{z} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{\delta} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)\underline{d}'$$

Ma siccome $\mathcal{B}$ *è una base, ogni elemento di* V *si scrive in modo* **unico** *come combinazione lineare degli* $\underline{u}_i$, *dunque* $\underline{d}\_\underline{d}' = A\underline{\delta}$, *quindi* $\underline{d}$ *è combinazione lineare delle colonne di* A *(con coefficienti* $\underline{\delta}$*)*