# Geometria BETR
# Foglio esercizi 4

**Esercizio 1.**
Si dica, motivando brevemente la risposta (ovvero indicando una proprietà degli spazi vettoriali che non è verificata se non si tratta di spazi, o un risultato che implica che siano spazi vettoriali) quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono spazi vettoriali.

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\},\ E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \text{ e } 2x = y\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\},\ E_4 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

**Esercizio 2.**
Scrivere il polinomio $-x^2 + 7$ come combinazione lineare dei polinomi $x^2 - 2x + 5$, $2x^2$, $x + 1$

**Esercizio 3.**
Siano $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vettori linearmente indipendenti. Si mostri che i vettori $\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} - \underline{v}$ sono linearmente indipendenti. Poi si mostri la stessa cosa per vettori $\underline{u}, \underline{v}$ di uno spazio vettoriale qualsiasi.

**Esercizio 4.**
Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vettori di $\mathbb{R}^3$, e supponiamo che si abbia $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$

(a) Si trovi una combinazione lineare di $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$ con almeno uno dei coefficienti $a_i$ non nullo.

(b) Dire se i vettori $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti motivando la risposta. (Attenzione: la risposta può essere: si, no, non ci sono abbastanza informazioni; nei primi due casi dare una dimostrazione, nell'ultimo caso trovare quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti e quattro vettori di $R^3$ $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente dipendenti).

**Esercizio 5.**
Si trovino basi degli spazi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari

$$S_1 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 6.**
Si considerino i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si verifichi che i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$

(b) Si trovino le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a quesa base.

**Esercizio 7.**

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si verifichi che formano una base di $\mathbb{R}^3$ e si trovino le coordinate del vettore $\underline{e}_1$ rispetto a questa base

(b) Si trovino le coordinate del vettore generico di $\mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (a, b, c)^t$ rispetto a questa base

**Esercizio 8.**

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (ossia $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)^t$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)^t$), si trovi una base e la dimensione dei seguenti sottospazi.

$$V_1 = L[\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3, \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_2 = [\underline{e}_1, \underline{e}_1 - \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_3 = L[\underline{e}_2, 2\underline{e}_2, \underline{e}_1 - \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3]$$

.

**Esercizio 9.**

Il vettore $\underline{u}$ di $\mathbb{R}^2$ ha coordinate $(5, -4)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 2)^t\, (2, 3)^t\}$.

(a) quali sono le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base canonica?

(b) quali sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1, 1)^t, (5, 6)^t\}$?

**Esercizio 10.**

Si consideri l'insieme dei polinomi di grado strettamente minore di 4, $\mathbb{R}^4[x]$.

(a) Si mostri che $\mathbb{R}^4[x]$ (più in generale $\mathbb{R}^n[x]$, i polinomi di grado strettamente minore di $n$) è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

(b) Si dimostri che il sottoinsieme $U = \{p(x) \in \mathbb{R}^4[x] \,|\, p(1) = 0\}$ è un sottospazio, e se ne determini una base.

**Esercizio 11.**

Una matrice quadrata $A$ si dice simmetrica se $A = A^t$, antisimmetrica se $A = -A^t$ (in maniera equivalente simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1 \ldots, n; j = 1, \ldots, n$, antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}\, i = 1 \ldots, n; j = 1, \ldots, n$; attenzione: in entrambi i casi abbiamo le equazioni per gli elementi della diagonale $a_{ii} = \pm a_{ii}$). Si consideri l'insieme $S$ delle matrici $2 \times 2$ simmetriche e $T$ delle matrici $2 \times 2$ antisimmetriche.

(a) Si dimostri che $S$ e $T$ sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

(b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ di $S$ ed una base $\mathcal{B}'$ di $T$

(c) È vero che $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è una base di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$?

**Esercizio 12.**

Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ una matrice quadrata qualsiasi.

a) Mostrare che $A + A^t$ é una matrice simmetrica e che $A - A^t$ é una matrice antisimmetrica.

b) Usare la parte a) per mostrare che ogni matrice quadrata si scrive come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica.

**Esercizio 13.**

Dati i vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si consideri l'equazione $x_1\underline{u}_1 + x_2\underline{u}_2 + x_3\underline{v} = \underline{b}$ dove $\underline{v} = (x, y, z)^t$ è un vettore di incognite. Si trovino, se possibile

(a) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette un' unica soluzione

(b) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione non ammetta soluzione

(c) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette infinite soluzioni.

**Esercizio 14.**

Si mostri che data una matrice $M$ con vettori riga $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$, se $M'$ è ottenuta da $M$ tramite un' operazione di riga e $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ sono le sue righe allora $L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m] = L[\underline{w}_1 \ldots, \underline{w}_m]$