Geometria BETR
Foglio esercizi 4

Esercizio 1.

Si dica, motivando brevemente la risposta (ovvero indicando una proprietà degli spazi vettoriali che non è verificata se non si tratta di spazi, o un risultato che implica che siano spazi vettoriali) quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono spazi vettoriali.

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\},\ E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \text{ e } 2x = y\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\},\ E_4 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

Soluzione: E_1, E_2 sono spazi, gli altri due no.

Esercizio 2.

Scrivere il polinomio $-x^2 + 7$ come combinazione lineare dei polinomi $x^2 - 2x + 5$, $2x^2$, $x + 1$

Soluzione: I coefficienti dei termini dello stesso grado devono essere uguali, dunque (scrivendo le equazioni partendo dal coefficiente di x^2)

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \\ 5\alpha + \gamma = 7 \end{cases}$$

da cui $-x^2 + 7 = 1(x^2 - 2x + 5) - 1(2x^2) + 2(x + 1)$.

Esercizio 3.

Siano $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vettori linearmente indipendenti. Si mostri che i vettori $\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} - \underline{v}$ sono linearmente indipendenti. Poi si mostri la stessa cosa per vettori $\underline{u}, \underline{v}$ di uno spazio vettoriale qualsiasi.

Soluzione: Dimostriamo che la matrice $\begin{pmatrix} u_1 + v_1 & u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 & u_2 - v_2 \end{pmatrix}$ ha rango 2.applicando alla sua trasposta le operazioni elementari $R_1 \to R_1 + R_2, R_1 \to 1/2R_1, R_2 \to R_2 - R_1, R_2 \to -R_2$ otteniamo $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^t$ che ha rango 2 per ipotesi. Alternativamente, dobbiamo considerare il sistema $\begin{cases} (u_1 + v_1)x + (u_1 - v_1)y = 0 \\ (u_2 + v_2)x + (u_2 - v_2)y = 0 \end{cases}$.
Raccogliendo i termini in modo diverso, il sistema si scrive $\begin{cases} u_1(x + y) + v_1(x - y) = 0 \\ u_2(x + y) + v_2(x - y) = 0 \end{cases}$.
Siccome $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti, la matrice $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ è invertibile, quindi il sistema (nelle incognite $(x + y), (x - y)$) è Crameriano e dobbiamo avere $(x + y) = 0$ e $(x - y) = 0$ ossia $x = y = 0$. Nel caos generale, la dimostrazione è simile: supponendo $x(\underline{u} + \underline{v}) + y(\underline{u} - \underline{v}) = 0$, raccogliendo i termini otteniamo $(x + y)\underline{u} + (x - y)\underline{v} = 0$. Visto che $\underline{u}, \underline{v}$ sono indipendenti dobbiamo avere $x + y = x - y = 0$ che ammette come unica soluzione $x = y = 0$.

Esercizio 4.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vettori di $\mathbb{R}^3$, e supponiamo che si abbia $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$

(a) Si trovi una combinazione lineare di $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$ con almeno uno dei coefficienti a_i non nullo.

(b) Dire se i vettori $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti motivando la risposta. (Attenzione: la risposta può essere: si, no, non ci sono abbastanza informazioni; nei primi due casi dare una dimostrazione, nell'ultimo caso trovare quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti e quattro vettori di R^3 $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente dipendenti).

Soluzione: a) $-\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 3\underline{v}_4 = \underline{0}$.

b) *Non ci sono abbastanza informazioni. infatti se consideriamo i vettori* $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *il primo è uguale alla somma del secondo e tre volte il quarto e gli ultimi tre vettori sono linearmente indipendenti, ma se consideriamo (per esempio)* $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *gli ultimi tre sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 5.

Si trovino basi degli spazi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari

$$S_1 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione: $\mathrm{Sol}(S_1) = L[\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\2\end{pmatrix}]$; $\mathrm{Sol}(S_2) = L[\begin{pmatrix}13\\-3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-13\\1\\0\\2\end{pmatrix}]$

Esercizio 6.

Si considerino i vettori $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

(a) Si verifichi che i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$

(b) Si trovino le coordinate del vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ rispetto a quesa base.

Soluzione: a) *Il determinante della matrice con colonne i tre vettori è* 4.

b) $(1/2, 1/2, -1/2)$.

Esercizio 7.

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

(a) Si verifichi che formano una base di $\mathbb{R}^3$ e si trovino le coordinate del vettore $\underline{e}_1$ rispetto a questa base

(b) Si trovino le coordinate del vettore generico di $\mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (a, b, c)^t$ rispetto a questa base

Soluzione: Il determinante della matrice A con colonne i tre vettori è 4. Risolvendo il sistema $A\underline{x} = (a, b, c)^t$ *che è sempre Crameriano troviamo* $x = \frac{3a-2b+c}{4}$, $y = b - \frac{a+c}{2}$, $z = \frac{3c-2b+a}{4}$

Esercizio 8.

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (ossia $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)^t$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)^t$), si trovi una base e la dimensione dei seguenti sottospazi.

$$V_1 = L[\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3, \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_2 = [\underline{e}_1, \underline{e}_1 - \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_3 = L[\underline{e}_2, 2\underline{e}_2, \underline{e}_1 - \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3]$$

.

Soluzione: Rispettivamente delle basi sono $\{\underline{e}_1 + \underline{e}_3, \underline{e}_3\}, \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}, \{\underline{e}_1 - \underline{e}_3, \underline{e}_2\}$.

Esercizio 9.

Il vettore $\underline{u}$ di $\mathbb{R}^2$ ha coordinate $(5, -4)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 2)^t\ (2, 3)^t\}$.

(a) quali sono le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base canonica?

Soluzione: $\underline{u} = 5\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$. *Quindi le coordinate rispetto alla base canonica sono* $(2, -2)^t$

(b) quali sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1, 1)^t, (5, 6)^t\}$?

Soluzione: Sono l'unica soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

ovvero $(22, -4)^t$.

Esercizio 10.

Si consideri l'insieme dei polinomi di grado strettamente minore di 4, $\mathbb{R}^4[x]$.

(a) Si mostri che $\mathbb{R}^4[x]$ (più in generale $\mathbb{R}^n[x]$, i polinomi di grado strettamente minore di n) è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

(b) Si dimostri che il sottoinsieme $U = \{p(x) \in \mathbb{R}^4[x] \,|\, p(1) = 0\}$ è un sottospazio, e se ne determini una base.

Soluzione: Per la prima parte basta osservare che il polinomio costante 0 *ha sicuramente grado minore di 4, e che sommando due polinomi o moltiplicando uno scalare per un polinomio il grado non cresce. Per la seconda parte verifichiamo che se* $p(1) = q(1) = 0,\ k \in \mathbb{R}$, *allora* $(p + kq)(1) = p(1) + kq(1) = 0$ *quindi* U *è chiuso rispetto a somma e prodotto per uno scalare. I polinomi* $1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3$ *sono linearmente indipendenti. Allora* U *ha dimensione almeno tre, ma al massimo quattro; però se la dimensione fosse* 4 *avremmo* $U = \mathbb{R}^4[x]$, *ma il polinomio costante* 1 *non appartiene a* U.

Esercizio 11.

Una matrice quadrata A si dice simmetrica se $A = A^t$, antisimmetrica se $A = -A^t$ (in maniera equivalente simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1 \ldots, n; j = 1, \ldots, n$, antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}\ i = 1 \ldots, n; j = 1, \ldots, n$; attenzione: in entrambi i casi abbiamo le equazioni per gli elementi della diagonale $a_{ii} = \pm a_{ii}$). Si consideri l'insieme S delle matrici 2×2 simmetriche e T delle matrici 2×2 antisimmetriche.

(a) Si dimostri che S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

(b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ di S ed una base $\mathcal{B}'$ di T

(c) È vero che $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è una base di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$?

Soluzione: a) *Si deve avere*

$$a_{12} = \pm a_{21}$$

a seconda che si abbiano matrici simmetriche o antisimmetriche. Quindi S e T sono lo spazio delle soluzioni di un'equazione omogenea nei coefficienti delle matrici, o nelle coordinate rispetto alla base canonica. Lo spazio delle soluzioni dunque è uno spazio vettoriale. Alternativamente è facile verificare che l'insieme delle matrici che soddisfano $a_{12} = \pm a_{21}$ contiene la matrice nulla ed è chiuso rispetto a somma e prodotto per uno scalare.

b) $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ *e* $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

c) *Si perchè ogni per matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(b+c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(b-c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *e poichè* $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ *ha dimensione* 4 *quattro generatori sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 12.

Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ una matrice quadrata qualsiasi.

a) Mostrare che $A + A^t$ é una matrice simmetrica e che $A - A^t$ é una matrice antisimmetrica.

b) Usare la parte a) per mostrare che ogni matrice quadrata si scrive come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica.

Soluzione: a) *Abbiamo che* $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ *quindi* $A + A^t$ *è simmetrica. (Alternativamente, l'entrata ij di $(A + A^t)$, denotata $(A + A^t)_{ij}$, è $a_{ij} + a_{ji}$, e $(A + A^t)_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$). Analogamente $(A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$.*

b) *Per ogni matrice quadrata A, possiamo scrivere $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$.*

Esercizio 13.

Dati i vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si consideri l'equazione $x_1\underline{u}_1 + x_2\underline{u}_2 + x_3\underline{v} = \underline{b}$ dove $\underline{v} = (x, y, z)^t$ è un vettore di incognite. Si trovino, se possibile

(a) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette un' unica soluzione

(b) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione non ammetta soluzione

(c) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette infinite soluzioni.

Soluzione: Il rango della matrice $\mathrm{Mat}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{b})$ *è tre, quindi $\underline{b} \notin L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$. D'altra parte $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ sono linearmente indipendenti, dunque aggiungendo un qualsiasi vettore $\underline{v}$ che estenda a una base di tutto $\mathbb{R}^3$ rende l'equazione compatibile con soluzione unica. Dunque per tutti i $\underline{v} \notin L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$ la soluzione è unica. Al contrario se $\underline{v} \in L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$, abbiamo che $L[\underline{u}_1, \underline{u}_2] = L[\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}]$ e dunque la soluzione non esiste*

Esercizio 14.

Si mostri che data una matrice M con vettori riga $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$, se M' è ottenuta da M tramite un' operazione di riga e $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ sono le sue righe allora $L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m] = L[\underline{w}_1 \ldots, \underline{w}_m]$

Soluzione: Se l'operazione è scambiare due righe, non c'è nulla da mostrare. Supponiamo che sia $\underline{w}_1 = k\underline{v}_1,\ k \neq 0$ *ossia che l'operazione di riga sia la moltiplicazione per uno scalare non nullo (supporre che sia la prima riga a meno di scambi di riga non lede la generalità). Allora si ha che* $\underline{v}_i = \underline{w}_i$ *per ogni* $i \geq 2$ *e*

$$\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + \ldots + a_m\underline{v}_m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{u} = \frac{a_1}{k}\underline{w}_1 + \ldots + a_m\underline{w}_m$$

Analogamente

$$\underline{u} = b_1\underline{w}_1 + \ldots + b_m\underline{w}_m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{u} = kb_1\underline{v}_1 + \ldots + b_m\underline{v}_m.$$

Infine se $w_1 = v_1 + kv_2$ *(ancora supporre che le righe coinvolte siano le prime due non lede la generalità) abbiamo ancora* $\underline{v}_i = \underline{w}_i$ *per ogni* $i \geq 2$ *e*

$$\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + a_2 \ldots + a_m\underline{v}_m \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1\underline{w}_1 + (a_2 - ka_1)\underline{w}_2 \ldots + a_m\underline{w}_m$$

e

$$\underline{u} = b_1\underline{w}_1 + \ldots + b_m\underline{w}_m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{u} = b_1\underline{v}_1 + (b_2 + kb_1)\underline{v}_2 \ldots + b_m\underline{v}_m.$$

Quindi ogni vettore che si scrive come combinazione lineare delle righe di M *si scrive anche come combinazione lineare della righe di* M'.