Geometria BETR
Foglio esercizi 2

Esercizio 1.
Dimostrare che se una riga di una matrice è combinazione lineare delle altre, allora con una successione finita di operazioni di riga possiamo arrivare ad una matrice la cui riga corrispondente é nulla

Esercizio 2.
Eseguire i seguenti prodotti di matrici

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(e)
$$(1, -1, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.
Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ tali che $AX = 0$ e tutte le matrici $Y \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ tali che $YA = 0$.

Esercizio 4.
Per ognuna delle seguenti matrici determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.
Date le matrici

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare (se esistono) tutte le matrici X che soddisfino l'equazione matriciale $AX = B$.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare (se esistono) tutte le matrici X che soddisfino l'equazione matriciale $AX = B$.

Esercizio 6.

Date le matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

verificare

(a) $AB \neq BA$

(b) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$. Qual'è la formula corretta per il quadrato di un binomio?

Esercizio 7.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

e i vettori $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$,

(a) a verificare che il prodotti $e_1 A$ sono le righe di A

(b) b verificare che il prodotti Ae_i^t sono le colonne di A (e_i^t sono i trasposti dei vettori e_i, ovvero gli stessi vettori scritti come vettori colonna).

Esercizio 8.

Trovare, quando esiste, l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema che si ottiene dall'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

È dato il sistema di tre equazioni in tre incognite $S : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = 3 \\ 2x + 6y + 13z = 5 \end{cases}$.

Invertire la matrice per risolvere S.

Esercizio 10.

Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 5x + 8y + 9z = 5 \end{cases}$ Si inverta la matrice dei coefficienti e si scriva l'unica soluzione del sistema.

Esercizio 11.

Calcolare il determinante e l'inversa (quando esiste) della matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 12.

Si usi l'algoritmo di Gauss per calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13.

Sia A una matrice qualsiasi. Si trovino le matrici M che moltiplicate per A a destra (cioè MA) danno come risultato la matrice ottenuta da A

(a) scambiando la riga i con la riga j

(b) moltiplicando una riga i per uno scalare $k \neq 0$.

(c) aggiungendo alla riga i un multiplo della riga j

(d) si calcolino i determinanti di queste matrici e si utilizzi il risultato per dimostrare la proposizione sull'effetto delle operazioni elementari sul determinante visto in classe

Esercizio 14.

Si usi l'algoritmo di Gauss sulla matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

come visto in classe per trovare l'inversa (se esiste) della matrice di ordine tre a sinistra. Verificare il risultato calcolando l'inversa anche utilizzando la formula.

Esercizio 15.

Data la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice è invertibile, e, per questi valori, trovare la matrice A_λ^{-1}

Esercizio 16.

Dati i sistemi

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 5x + 8y + 9z = 5 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad S : 3 \begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$$

(a) Si verifichi che sono Crameriani.

(b) Si applichi l'algoritmo di Gauss per trovare le inverse delle matrici dei coefficienti e risolverli.

Esercizio 17.

Trovare una matrice quadrata, non nulla, di ordine 3, tale che $A^2 = O$ (*Suggerimento: non provate formalmente ad impostare un sistema nei coefficienti e a risolverlo; provate prima per tentativi pensando anche al caso di ordine 2*)