Geometria BETR
Foglio esercizi 2

Esercizio 1.

Dimostrare che se una riga di una matrice è combinazione lineare delle altre, allora con una successione finita di operazioni di riga possiamo arrivare ad una matrice la cui riga corrispondente é nulla

Soluzione: Siano $R_1, \ldots, R_m$ i vettori riga della matrice. Possiamo assumere, per semplificare la notazione, che si abbia $R_1 = \alpha_2 R_2 + \cdots + \alpha_n R_n$. Allora basterà effettuare le operazioni di riga

$$R_1 \to R_1 - \alpha 2 R_2, R_1 \to R1 - \alpha_3 R_3, \ldots, R1 \to R_1 - \alpha_n R_n$$

Esercizio 2.

Eseguire i seguenti prodotti di matrici

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(e)

$$(1, -1, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad (2, -8, -8, -8)$$

.

Esercizio 3.

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ tali che $AX = 0$ e tutte le matrici $Y \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ tali che $YA = 0$.

Soluzione: a) *Moltiplicando* $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z & y+w\\ x+z & y+w\end{pmatrix}$. *Ponendo* $z = t, w = s$, *le matrici cercate sono della forma* $\begin{pmatrix}-t & -s\\ t & s\end{pmatrix}$ *con* $t, s \in \mathbb{R}$.

b) *Come prima, facendo la moltiplicazione per una matrice di incognite si ottiene la matrice* $\begin{pmatrix}x+y & x+y\\ z+w & z+w\end{pmatrix}$. *Ponendo* $y = t, w = s$ *otteniamo* $\begin{pmatrix}-t & t\\ -s & s\end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

Per ognuna delle seguenti matrici determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A_1 = \begin{pmatrix}3 & 6\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}3 & 6\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}.$$

Soluzione: La matrice A_2 *non è invertibile,* $A_1^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -6\\ \frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$ $\qquad A_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -a & 1\end{pmatrix}$-

Esercizio 5.

Date le matrici

(a)

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

determinare (se esistono) tutte le matrici X che soddisfino l'equazione matriciale $AX = B$.

(b)

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

determinare (se esistono) tutte le matrici X che soddisfino l'equazione matriciale $AX = B$.

Soluzione: Nel primo caso infinite, dipendenti da due parametri, della forma $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ s & t\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. *Nel secondo caso* A *è invertibile e l'unica soluzione è* $A^{-1}B$.

Esercizio 6.

Date le matrici :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},$$

verificare

(a) $AB \neq BA$

(b) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$. Qual'è la formula corretta per il quadrato di un binomio?

Soluzione: $AB = \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\quad BA = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

$(A+B)^2 = \begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ $\quad A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix}-2 & 16\\ -1 & 7\end{pmatrix}$. *Siccome le matrici non commutano* $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Esercizio 7.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

e i vettori $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$,

(a) a verificare che il prodotti $e_1 A$ sono le righe di A

(b) b verificare che il prodotti Ae_i^t sono le colonne di A (e_i^t sono i trasposti dei vettori e_i, ovvero gli stessi vettori scritti come vettori colonna).

Esercizio 8.

Trovare, quando esiste, l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema che si ottiene dall'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

È dato il sistema di tre equazioni in tre incognite $S : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = 3 \\ 2x + 6y + 13z = 5 \end{cases}$.

Invertire la matrice per risolvere S.

Soluzione: Il determinante della matrice dei coefficienti è 1, quindi il sistema è Crameriano. L'unica soluzione è data da $\begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 10.

Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 5x + 8y + 9z = 5 \end{cases}$ Si inverta la matrice dei coefficienti e si scriva l'unica soluzione del sistema.

Soluzione: a) *Il determinante della matrice dei coefficienti è* -2.

Esercizio 11.

Calcolare il determinante e l'inversa (quando esiste) della matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione: Il determinante é $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$. *Quindi la matrice è sempre invertibile con inversa* $R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *Usando le identità* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ *e* $\cos(-\theta) = \cos\theta$ *si vede* $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Esercizio 12.

Si usi l'algoritmo di Gauss per calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione: -154

Esercizio 13.

Sia A una matrice qualsiasi. Si trovino le matrici M che moltiplicate per A a destra (cioè MA) danno come risultato la matrice ottenuta da A

(a) scambiando la riga i con la riga j

(b) moltiplicando una riga i per uno scalare $k \neq 0$.

(c) aggiungendo alla riga i un multiplo della riga j

(d) si calcolino i determinanti di queste matrici e si utilizzi il risultato per dimostrare la proposizione sull'effetto delle operazioni elementari sul determinante visto in classe

Soluzione: Le matrici sono le matrici che si ottengono dall'identità applicando l'operazione corrispondente. Lo scambio di due righe si effettua moltiplicando A per la matrice M ottenuta dall'identità scambiando le due righe corrispondenti. Questa matrice ha determinante -1, quindi applicando Binet il determinante della matrice ottenuta da A scambiando due righe ha segno opposto. Nel caso della moltiplicazione per uno scalare la matrice è diagonale con tutti uno sulla diagonale ad eccezione dell'elemento della riga i che è k. Il determinante quindi è k. Ancora con Binet il determinante della matrice così ottenuta è $k \cdot \det A$. Nel terzo caso la matrice è triangolare superiore o inferiore con tutti gli elementi della diagonale uguali a 1 e l'unico elemento non nullo fuori dalla diagonale è quello sulla riga i colonna j che è uguale a k. Il determinante quindi è 1 e la matrice ottenuta da A mediante questa operazione avrà determinante uguale a quello di S.

Esercizio 14.

Si usi l'algoritmo di Gauss sulla matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

come visto in classe per trovare l'inversa (se esiste) della matrice di ordine tre a sinistra. Verificare il risultato calcolando l'inversa anche utilizzando la formula.

Soluzione: Una (possible) successione di operazioni elementari dà come risultato

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Esercizio 15.

Data la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice è invertibile, e, per questi valori, trovare la matrice A_λ^{-1}

Soluzione: Il determinante è $\lambda + 9$ quindi l'inversa esiste per $\lambda \neq -9$. In questo caso formiamo la matrice dei complementi algebrici (o utilizziamo la formula) e troviamo

$$\frac{1}{\lambda+9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & \lambda \\ \lambda+6 & -\lambda-3 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Esercizio 16.

Dati i sistemi

$$S_1 : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=3 \\ 5x+8y+9z=5 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \\ y+z=3 \end{cases} \quad S:3 \begin{cases} x+y-z=a \\ x-y+z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$$

(a) Si verifichi che sono Crameriani.

(b) Si applichi l'algoritmo di Gauss per trovare le inverse delle matrici dei coefficienti e risolverli.

Soluzione: a) *Il determinante della matrice dei coefficienti è sempre non nullo .*

b) *Con le operazioni elementari $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 5R_1, R_3 \to R_3 - 3R_2, R_3 \to -\frac{1}{2}R_3$ otteniamo la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Con le ulteriori operazioni $R_2 \to \mathbb{R}_2 - 2R_3, R_1 \to R_1 - R_2, R_1 \to R_1 - R_3$ arriviamo alla matrice a blocchi $(I_3, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. *Sostituendo si vede che il vettore è (l'unica) soluzione.*

Esercizio 17.

Trovare una matrice quadrata, non nulla, di ordine 3, tale che $A^2 = O$ (*Suggerimento: non provate formalmente ad impostare un sistema nei coefficienti e a risolverlo; provate prima per tentativi pensando anche al caso di ordine 2*)

Soluzione:

a) *Ad esempio* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *o anche* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) *Per la formula di Binet* $0 = \det A^2 = (\det A)(\det A)$

c) *Ad esempio* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *oppure* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) *Qui la formula di Binet implica che il determinante di A soddisfi $x^2 = x$*