Geometria BETR
Foglio esercizi 11

Esercizio 1.

Si considerino i punti del piano $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (4,-1)$, $C \equiv (-1/2, 2)$

(a) Si determini se i punti A, B, C sono allineati e, in caso affermativo, si determini l'equazione cartesiana della retta che li contiene.

(b) Trovare le coordinate del punto D tale che $\overrightarrow{OD}$ sia equipollente ad $\overrightarrow{AB}$.

(c) Trovare le coordinate del punto E tale che $\overrightarrow{BE}$ sia equipollente ad $\overrightarrow{OA}$.

Esercizio 2.

Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, r, r' si determini $r \cap r'$

(a) $r: \ x - 2y + 5 = 0, \quad r': \ 2x + y - 1 = 0$

(b) $r: \ x - 2y + 5 = 0, \quad r': \ 2x - 4y + 5 = 0$

(c) $r: \ 2x + y - 1 = 0, \quad r': \ 4x + 2y - 2 = 0$

Esercizio 3.

Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, r, r' si determini $r \cap r'$

(a) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 + t \end{cases};$

(b) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 3t \end{cases};$

(c) $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 6 - (3/2)t \end{cases};$

Esercizio 4.

Data la retta

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

si trovi il punto A di r tale che l'angolo di r con il vettore $\overrightarrow{AO}$ sia $\pi/2$, e il punto B di r tale che l'angolo di r con il vettore $\overrightarrow{BO}$ sia $\pi/4$ (O è l'origine del riferimento cartesiano, l'angolo tra retta e vettore è l'angolo tra il vettore direttore di r dato dalle equazioni parametriche e il vettore). *Suggerimento: per trovare B si usi il metodo del punto mobile, i.e. si scriva il vettore generico applicato in un punto di r con vertice nell'origine.*

Esercizio 5.

Si considerino le proiezioni sui piani coordinati $p_1(x,y,z) = (0,y,z)$, $p_2(x,y,z) = (x,0,z)$, $p_3(x,y,z) = (x,y,0)$.

(a) Siano A, B, C tre punti dello spazio, si mostri che se per un i i punti $p_i(A), p_i(B), p_i(C)$ non sono allineati, allora A, B, C non sono allineati.

(b) Si trovi un esempio di tre punti A, B, C non allineati t.c. $p_2(A), p_2(B), p_2(C)$ siano allineati.

Esercizio 6.

(a) Determinare le equazioni delle rette del piano che formano con l'asse delle x un angolo di $\pi/3$ (*suggerimento:* $\cos(\pi/3) = 1/2$).

(b) Trovare le due rette per il punto $A \equiv (0, 1)$ tali che, detti B e C i punti di intersezione con l'asse x, il triangolo ABC sia equilatero.

Esercizio 7.

Si consideri il fascio di piani di asse la retta

$$r : \begin{cases} x - 2y + 3z + 5 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

si trovino il piano del fascio tale che

(a) Contiene il punto di coordinate $(3, -1, 2)$

(b) Contiene il punto di coordinate $(1, -2, 0)$

(c) è parallelo al piano di equazione $3x - 2y + 7z + 1 = 0$

(d) È perpendicolare al piano di equazione $4x - 2y - z + 2 = 0$

(e) Contiene la retta di equazioni parametriche $(x, y, z)^t = (\frac{1}{2} + t, t, 1)^t$

Esercizio 8.

Si considerino i punti $A \equiv (1, 3, 1)$, $B \equiv (3, 4, -1)$, $C \equiv (4, 1, 2)$.

(a) Si determini se A, B, C sono allineati e se non lo sono, scrivere le equazioni cartesiane del piano π che li contiene.

(b) Data la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 12 = 0 \\ x + 6y + 5z - 10 = 0 \end{cases}$ si determini $r \cap \pi$

(c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' parallela ad r passante per l'origine.

Esercizio 9.

Verificare che le rette $r_1 : x + z - 1 = y + z - 2 = 0$ e $r_2 : x - y = y + z + 1 = 0$ sono parallele e si trovi l'equazione di un piano che le contenga

Esercizio 10.

Si trovino le equazioni della retta parallela alla retta $r : x - z = y - 2z = 0$ e incidente le rette $r_1 : x + 2z - 1 = y - 3z - 1 = 0$ $r_2 : x - 2z + 3 = y + z - 2 = 0$

Esercizio 11.

(a) Si trovi l'equazione della proiezione dell'asse delle x (ossia la retta di equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$) sul piano di equazione $x + y + z = 0$

(b) È possibile trovare due rette che abbiano la stessa proiezione ortogonale su un piano?

Esercizio 12.

Si consideri la retta r di equazione $2x - y + 2 = 0$ e l'origine $O \equiv (0, 0)$.

(a) Trovare la proiezione ortogonale H di O su r e la distanza $d(O, r)$.

(b) Trovare il simmetrico di O rispetto a r

Esercizio 13.

Trovare i punti del piano a distanza 2 dalla retta r di equazione $3x + 2y - 2 = 0$.

Esercizio 14.

Si consideri il punto $A \equiv (2, 0)$ e la retta $r : 2x + y + 1 = 0$

(a) Si trovi la distanza $d(A, r)$.

(b) Dati i punti $B \equiv (0, -1)$, $C \equiv (-1, 1)$ si calcoli l'area del triangolo ABC.

Esercizio 15.

Dimostrare che se $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sono due vettori linearmente indipendenti, l'area del parallelogramma da essi determinato è data da

$$\sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle \\ \langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle & \langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\rangle \end{pmatrix}}.$$

Esercizio 16.

Si dimostri la formula della distanza di un punto P di coordinate (x_0, y_0) da una retta di equazione $r : ax + by + c = 0$:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esercizio 17.

Date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si scrivano le equazioni parametriche di r, s e si dica se sono parallele, incidenti o sghembe.

(b) Si trovi l'equazione del piano π parallelo ad entrambe le rette contenente r.

(c) Si trovino le equazioni cartesiane della retta proiezione ortogonale di s su π

(d) Si trovi l'equazione dell'intersezione della proiezione di s su π, trovata al punto precedente, con r e l'equazione della retta di minima distanza tra r ed s

Esercizio 18.

Si considerino il piano $\pi :\ x + y + z = 5$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$$

(a) Si scrivano le equazioni paramemiche delle rette perpendicolari a π per il punto mobile di r (*quindi avremo tre equazioni in due parametri).*

(b) Si elimino i parametri (come nel caso del passaggio da equazioni parametriche a quelle cartesiane nel piano) per ottenere un'equazione di un piano π'

(c) Si mostri che la retta $\pi \cap \pi'$ è la proiezione di π su r.

Esercizio 19.

Si consideri la retta $r :\ x + 1 = 0$ ed il punto $A \equiv (1, 0)$. Si determinino i punti $P \equiv (x, y)$ del piano tali che $d(P, r) = d(P, A)$.

Esercizio 20.

Si considerino i punti $A \equiv (1, 3, 1)$, $B \equiv (3, 4, -1)$, $C \equiv (4, 1, 2)$.

(a) Si determini se A, B, C sono allineati e se non lo sono, scrivere le equazioni cartesiane del piano π che li contiene.

(b) Data la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 12 = 0 \\ x + 6y + 5z - 10 = 0 \end{cases}$ si determini $r \cap \pi$

(c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' parallela ad r passante per l'origine.

Esercizio 21.
Si consideri il piano $\pi : 3x-2y+z+1$ e il punto $A \equiv (1,2,0)$. Si trovi l'equazione parametrica della retta r passante per A, interamente contenuta in π e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{v}$ di coordinate $(1,-1,1)$

Esercizio 22.
Si consideri il piano $\pi : x+y-z+2=0$

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante per il punto $(1,1,0)$

(b) Si scriva il fascio di piani per r e si mostri che ogni piano del fascio è perpendicolare a π.

(c) Si trovi il piano del fascio passante per $(0,0,2)$ e si scriva un sistema di equazioni cartesiane per la retta per i due punti $(1,1,0)$, $(0,0,2)$.

Esercizio 23.
Si Considerino i punti $A \equiv (1,0,0)$, $B \equiv (0,1,0)$, $C \equiv (0,0,1)$

(a) Si trovi il perimetro del triangolo ABC.

(b) Si trovi l'area del triangolo ABC

(c) Si trovi l'equazione del piano che contiene il triangolo ABC

Esercizio 24.
Si consideri la retta $r : \begin{cases} 2x-y+z+3=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

(a) Si trovino i parametri direttori di r

(b) Si trovino le equazioni cartesiane della retta $r_\perp$ perpendicolare e incidente ad r passante per il punto $P \equiv (0,2,-1)$ e il punto di intersezione $r \cap r_\perp$

(c) L'equazione del piano contenente r e $r_\perp$.

Esercizio 25.
Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -3t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases}$$

(a) Si trovi $r \cap s$.

(b) Si trovi l'equazione del fascio di piani paralleli ad r ed s ed il piano (se esiste) che contiene r ed s.

(c) L'equazione del piano del fascio contenente la retta s' per $(0,0,1)$ parallela ad s. È vero che r ed s' sono sghembe?

(d) Si trovi l'equazione del piano che contiene s ed s'.

Esercizio 26.
Si considerino le rette dipendenti da parametri reali k,h

$$r : \begin{cases} -2x+y=1 \\ 4x-4y+z=h \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2kx-(2+k)y+z=3 \\ (k+1)y+kz=5 \end{cases}$$

(a) Per quali valori di k,h le rette si incontrano in un punto?

(b) Per quali valori di k, h le rette sono parallele?

(c) Per quali valori di k, h le rette sono sghembe?

Esercizio 27.

Si calcoli la distanza e la retta di minima distanza tra le seguenti coppie di rette:

(a) $r : x + y + 1/11 = z - 7/11 = 0,\ r' : x - 2y - 1 = z - y + 1 = 0$

(b) $r : x - y + 5/3 = 3y - z - 1/3 = 0,\ r' : x - z + 30x + y + 2 = 0$

Esercizio 28.

Dati i sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

dire se rappresentano una circonferenza nello spazio.

Esercizio 29.

Scrivere l'equazione della sfera tangente nell'origine O al piano $\pi : x - 2y + z = 0$ passante per il punto P di coordinate $(2, 1, 2)$.

Esercizio 30.

Scrivere le equazioni delle sfere tangenti al piano xy, con centro sulla retta $3x - z = 3y - 2z = 0$ e passanti per il punto P di coordinate $(0, 0, 1)$