Geometria BETR
Foglio esercizi 10

Esercizio 1.
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Si dica se esiste un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{v}^t A \underline{v} > 0$. Se esiste trovarne uno, se non esiste si dica perchè

Esercizio 2.
Sia A una matrice simmetrica

a) Mostrare che se A non ha rango massimo, esistono vettori non nulli $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{u}^t A \underline{v} = 0$, ossia che sono 'ortogonali' a tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$, inclusi se stessi.

b) Siano $\lambda > 0, \mu < 0$ autovalori di A, allora esiste un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{u}^t A \underline{u} = 0$.

Esercizio 3.
Si mostri che un sottospazio affine $U \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se $\underline{0} \in U$

Esercizio 4.
Dati i punti $(1,2,1)^t, (1,0,1)^t, (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 5.
Dati i punti $(1,0,2)^t, (1,-1/2,1)^t, (2,3,9)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 6.
Dati i punti $(0,5,-3)^t, (3,-4,9)^t, (2,-1,5)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 7.
Dati i punti $(1,0,1,2)^t, (1,1,3-2)^t, (-2,1,-2,1)^t, (3,0,2,-7)^t$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 8.
Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi affini di dimensione minima che contengono i punti dati di seguito

(a) $A = (1,0,-2)^t$, $B = (2,-1,0)^t$, $C = (0,1,-4)^t$, $D = (1,1,1)^t$

(b) $A = (1,-1,-1,1)^t$, $B = (1,0,2,1)^t$, $C = (1,1,1,-1)^t$, $D = (2,2,2,-2)^t$

(c) $A = (1,-1,-1,1)^t$, $B = (1,0,2,1)^t$, $C = (1,1,1,-1)^t$, $D = (1,2,4,-1)$

Esercizio 9.
Siano U, W sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $U \cap W$ non è vuoto, allora è sottospazio affine. Qual'è la giacitura di $U \cap W$?

Esercizio 10.
Sia V uno spazio vettoriale, $E \subseteq V$ sottospazio, $\underline{u}_0, \underline{w}_0 \in V$. Si dimostri

(a) Si ha o $\underline{u}_0 + E = \underline{w}_0 + E$ oppure $(\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E) = \emptyset$.

(b) Lo spazio V si partiziona in insiemi del tipo $\underline{v} + E$ disgiunti, ossia possiamo scrivere

$$V = \bigcup_i (\underline{v}_i + E)$$

per una qualche famiglia (infinita, possibilmente anche non numerabile) $\{\underline{v}_i\} \subseteq V$ con $(\underline{v}_i + E) \cap (\underline{v}_j + E) = \emptyset$ per $i \neq j$.

Per i prossimi due esercizi bisogna generalizzare la definizione di sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ a sottospazio affine di uno spazio vettoriale V. Non è difficile convincersi che funziona tutto allo stesso modo.

Esercizio 11.
Sia $V = \mathbb{R}^4[x]$, mostrare che l'insieme $U = \{p(x) | p(1) = 1\}$ è sottospazio affine.

Esercizio 12.
Sia $V = \mathrm{Mat}(n)$, Σ il sottospazio delle matrici simmetriche. Si mostri che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma$$