**Geometria BETR**
**Foglio esercizi 10**

**Esercizio 1.**
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Si dica se esiste un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{v}^t A \underline{v} > 0$. Se esiste trovarne uno, se non esiste si dica perchè

*Soluzione: La matrice ha rango 1, e* $E(0) = \operatorname{Ker} A = L[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}]$. *L'altro autovalore ha come autospazio associato il complemento ortogonale* $E(0)^{\perp} = L[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Moltiplicando un vettore di questo secondo autospazio per $A$ troviamo che l'altro autovalore è $-9$, quindi la matrice è semidefinita negativa e non esiste alcun vettore $\underline{v}$ tale che $\underline{v}^t A \underline{v} > 0$*

**Esercizio 2.**
Sia $A$ una matrice simmetrica

a) Mostrare che se $A$ non ha rango massimo, esistono vettori non nulli $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{u}^t A \underline{v} = 0$, ossia che sono 'ortogonali' a tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$, inclusi se stessi.

   *Soluzione: Sia $\underline{u} \in \operatorname{Ker} A$, allora per ogni ulv $\in R^n$ $\underline{v}^t A \underline{u} = \underline{v}^t \underline{0} = 0$*

b) Siano $\lambda > 0, \mu < 0$ autovalori di $A$, allora esiste un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{u}^t A \underline{u} = 0$.

   *Soluzione: Siano $\underline{u}, \underline{v}$ autovettori di norma 1 associati rispettivamente a $\lambda$ e $\mu$. allora se $\underline{w} = \sqrt{-\mu}\underline{u} + \sqrt{\lambda}\underline{v}$ abbiamo*

   $$\underline{w}^t A \underline{w} = (\sqrt{-\mu}\underline{u} + \sqrt{\lambda}\underline{v})^t A(\sqrt{-\mu}\underline{u} + \sqrt{\lambda}\underline{v}) = (-\mu\underline{u})^t \lambda\underline{u} + \sqrt{-\mu}\underline{u}^t \sqrt{\lambda}\mu\underline{v} + \sqrt{\lambda}\underline{v}^t \sqrt{-\mu}\lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}^t \mu\underline{v} = -\lambda\mu + \lambda\mu = 0$$

   *poichè $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono ortogonali.*

**Esercizio 3.**
Si mostri che un sottospazio affine $U \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se $\underline{0} \in U$

*Soluzione: Se è vettoriale deve contenere il vettore nullo, viceversa detta $U_0$ la giacitura abbiamo che $\underline{u} \in U \iff \underline{u} - \underline{0} = \underline{u} \in U_0$*

**Esercizio 4.**
Dati i punti $(1,2,1)^t, (1,0,1)^t, (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

*Soluzione: $x - z = 0$*

**Esercizio 5.**
Dati i punti $(1,0,2)^t, (1,-1/2,1)^t, (2,3,9)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

*Soluzione:* $x + 2y - z + 1 = 0$

**Esercizio 6.**
Dati i punti $(0, 5, -3)^t, (3, -4, 9)^t, (2, -1, 5)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

*Soluzione:* $3x + y - 5 = 0 = -4x + z + 3$

**Esercizio 7.**
Dati i punti $(1, 0, 1, 2)^t, (1, 1, 3-2)^t, (-2, 1, -2, 1)^t, (3, 0, 2, -7)^t$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

**Esercizio 8.**
Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi affini di dimensione minima che contengono i punti dati di seguito

(a) $A = (1, 0, -2)^t$, $B = (2, -1, 0)^t$, $C = (0, 1, -4)^t$, $D = (1, 1, 1)^t$

*Soluzione: Le* $x = 2$ *coordinate dei vettori* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ *sono rispettivamente* $\underline{v}_1 = (1, -1, 2)^t, \underline{v}_2 = (-1, 1, -2)^t, \underline{v}_3 = (0, 1, 3)^t$. *I primi due vettori sono linearmente dipendenti, quindi i punti* $A, B, C$ *sono allineati, dunque il sottospazio cercato è il piano affine di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s + t \\ z = -2 + 2s + 3t \end{cases}$$

*Quelle cartesiane sono le equazioni del piano che contiene* $A, B, D$ *che conterrà anche* $C$ *visto che deve contenere tutta la retta per* $A$ *e* $B$. *Facendo i conti l'equazione cartesiana del piano è* $5x+3y-z-7 = 0$.

(b) $A = (1, -1, -1, 1)^t$, $B = (1, 0, 2, 1)^t$, $C = (1, 1, 1, -1)^t$, $D = (2, 2, 2, -2)^t$

*Soluzione: I vettori individuati dai quattro punti sono* $\underline{v}_1 = (0, 1, 3, 0)^t, \underline{v}_2 = (0, 2, 2, -2)^t, \underline{v}_3 = (1, 3, 3, -3)^t$, *che sono linearmente indipendenti. Dunque il sottospazio che contiene i punti deve avere dimensione* 3 *ed è quindi un iperpiano. Le equazioni parametriche sono in forma vettoriale*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2 + t_3\underline{v}_3$$

*L'equazione cartesiana del sottospazio vettoriale che contiene i tre vettori è* $3y-z+2w = 0$. *Imponendo il passaggio per il punto* $A$ *vediamo che le sue coordinate soddisfano l'equazione omogenea, dunque i quattro punti sono sull' iperpiano vettoriale individuato dall'equazione omogenea, ossia quello che contiene l'origine.*

(c) $A = (1, -1, -1, 1)^t$, $B = (1, 0, 2, 1)^t$, $C = (1, 1, 1, -1)^t$, $D = (1, 2, 4, -1)$

*Soluzione: I vettori individuati dai quattro punti sono* $\underline{v}_1 = (0, 1, 3, 0)^t, \underline{v}_2 = (0, 2, 2, -2)^t, \underline{v}_3 = (0, 3, 5, -2)$, *il terzo è somma dei primi due quindi i quattro punti sono complanari. Le equazioni cartesiane del sottospazio generato da* $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ *sono* $3y - z + 2w = 0 = x$. *Imponiamo il passaggio per* $A$ *per trovare*

$$\begin{cases} 3y - z + 2w = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

*Le equazioni parametriche in forma vettoriale sono* $\underline{x} = (1, -1, -1, 1)^t + s\underline{v}_1 + t\underline{v}_2$.

**Esercizio 9.**
Siano $U, W$ sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ . Dimostrare che se $U \cap W$ non è vuoto, allora è sottospazio affine. Qual'è la giacitura di $U \cap W$?

*Soluzione: Sia $\underline{z} \in U \cap W$, allora $U = \underline{z} + U_0$ e $W = \underline{z} + W_0$. Se $\underline{v} \in U \cap W$, allora $\underline{z} - \underline{v} = \underline{u} \in U_0$ poichè $\underline{v} \in U$, d'altra parte $\underline{z} - \underline{v} = \underline{w} \in W_0$ visto che $\underline{v} \in W$. Dunque deve erssere $\underline{u} = \underline{w} \in U_0 \cap W_0$ quindi l'intersezione è affine e la giacitura è l'intersezione delle giaciture*

**Esercizio 10.**

Sia $V$ uno spazio vettoriale, $E \subseteq V$ sottospazio, $\underline{u}_0, \underline{w}_0 \in V$. Si dimostri

(a) Si ha o $\underline{u}_0 + E = \underline{w}_0 + E$ oppure $(\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E) = \emptyset$.

*Soluzione: supponiamo $(\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E) \neq \emptyset$, sia $\underline{v} \in (\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E)$, allora $\underline{v} + E = \underline{u}_0 + E$ poichè $\underline{v} \in \underline{u}_0 + E$ e $E = E$ dunque $\underline{v} + E \subset \underline{u}_0 + E$, ma poichè $\underline{v} = \underline{u}_0 + \underline{e}$ per un qualche $\underline{e} \in E$ allora $\underline{u}_0 = \underline{v} - \underline{e}$ e $-\underline{e} \in E$ dunque $\underline{u}_0 \in \underline{v} + E$ e vale l'inclusione opposta.*

(b) Lo spazio $V$ si partiziona in insiemi del tipo $\underline{v} + E$ disgiunti, ossia possiamo scrivere

$$V = \bigcup_i (\underline{v}_i + E)$$

per una qualche famiglia (infinita, possibilmente anche non numerabile) $\{\underline{v}_i\} \subseteq V$ con $(\underline{v}_i + E) \cap (\underline{v}_j + E) = \emptyset$ per $i \neq j$.

*Soluzione: Chiaramente $V = \bigcup_{\underline{v} \in V} (\underline{v} + E)$. Per la parte precedente questi sono o coincidenti o disgiunti. Questo risultato ad esempio dice che posso partizionare $\mathbb{R}^3$ con una famiglia di piani paralleli (uno per ogni numero reale) disgiunti.*

Per i prossimi due esercizi bisogna generalizzare la definizione di sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ a sottospazio affine di uno spazio vettoriale $V$. Non è difficile convincersi che funziona tutto allo stesso modo.

**Esercizio 11.**

Sia $V = \mathbb{R}^4[x]$, mostrare che l'insieme $U = \{p(x) | p(1) = 1\}$ è sottospazio affine.

*Soluzione: $U = 1 + U_0$ dove $1$ è il polinomio costante, $U_0$ il sottospazio vettoriale dei polinomi che si annullano in $1$. Alternativamente $U$ è soluzione dell'equazione lineare nei coefficienti $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Alternativamente se $p, q \in U$ allora $p - q \in U_0$, quindi ogni elemento di $U$ si può scrivere come $1 + p_0$ con $p_0 \in U_0$.*

**Esercizio 12.**

Sia $V = \mathrm{Mat}(n)$, $\Sigma$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Si mostri che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma$$

*Soluzione: La differenza tra le due matrici appartiene a $\Sigma$.*