Geometria BETR
Foglio esercizi 1

Esercizio 1.

Risolvere le seguenti equazioni lineari nelle variabili indicate trovando una parametrizzazione dell'insieme delle soluzioni.

a) $2x + 5y = 3$ nelle incognite x, y.

b) $2x + 5y = 3$ nelle incognite x, y, z.

c) $2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Soluzione: a) *Ponendo* $y = t$ *otteniamo* $x = 3 - 5t$ *dunque abbiamo* ∞^1 *soluzioni date da* $\begin{pmatrix} \frac{3-5t}{2} \\ t \end{pmatrix}$ *con* $t \in \mathbb{R}$.

b) *Ponendo* $y = t$ *e* $z = s$ *abbiamo* ∞^2 *soluzioni:* $\begin{pmatrix} \frac{3-5t}{2} \\ t \\ s \end{pmatrix}$ *con* $t, s \in \mathbb{R}$.

c) *L'equazione ammette* ∞^3 *soluzioni. Poniamo* $x_2 = t, x_3 = s, x_4 = u$ *e quindi* $x_1 = (-t + u)/2$. *Insieme delle soluzioni:* $\begin{pmatrix} (-t - 3u)/2 \\ t \\ s \\ u \end{pmatrix}$ *con* $t, s, u \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.

Se Diego avesse gli stessi soldi di Sergio, insieme avrebbero 20 euro. Invece Diego ha 5 euro di meno. Quanti soldi ha Diego? E Sergio?

Soluzione: Se D, S *sono i soldi di Diego e Sergio rispettivamente, si risolve il sistema* $\begin{cases} D + S + 5 = 20 \\ D = S - 5 \end{cases}$ *o, piú semplicemente,* $\begin{cases} 2S = 20 \\ D = S - 5 \end{cases}$

Esercizio 3.

Si consideri il seguente sistema

$$S : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

a) Stabilire se i vettori $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono soluzioni di S.

Soluzione: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ *è una soluzione, mentre* $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *no (non soddisfa né la prima né la seconda equazione).*

b) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} k \\ k + 11 \\ 2 \end{pmatrix}$ è soluzione di S?

Soluzione: Sostituendo $x = k, y = k+11, z = 2$ nel sistema, si ottiene $\begin{cases} 3k + 16 = 1 \\ k + 7 = 2 \end{cases}$, dunque l'unico valore è $k = -5$

Esercizio 4.

Per ciascuna delle seguenti matrici, stabilire se è a scalini oppure no:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Solo A_1 non è a scalini

Esercizio 5.

Risolvere i seguenti sistemi lineari a scalini:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 5 \\ z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_4 = 2 \end{cases}$$

In ciascun caso, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Soluzione: S_1 ammette l'unica soluzione $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Scrivendo la matrice completa del sistema S_2, vediamo che ci sono 3 pivot e che la variabile nella cui colonna non cadono pivot è x_3. Ci sono dunque ∞^1 soluzioni. Ponendo $x_3 = t$ e risolvendo otteniamo

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -\frac{2}{3} \\ t \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \square$$

Esercizio 6.

Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i ad una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Soluzione: Matrice A_1: con l'operazione $R_2 \to R_2 - 2R_1$ si riduce a $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrice A_2: con le operazioni $R_2 \to R_2 + 3R_1, R_3 \to R_3 - 5R_1$ si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$. Applicando $R_3 \to R_3 + R_2$ abbiamo $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Matrice A_3: con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_3 \to R_3 + 8R_2$ la matrice si riduce a $\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Nota: la forma a scalini di una matrice non è unica e risposte diverse dalle precedenti, ma ugualmente corrette, sono possibili. Il numero dei pivot, pero', deve essere sempre lo stesso: 2 *per la matrice* $\tilde{A}_1$ *e* 3 *per le matrici* $\tilde{A}_2, \tilde{A}_3$.

Esercizio 7.

Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & -1 & 9 & 9 \\ 3 & 5 & -12 & 17 & 7 \end{pmatrix}.$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i a una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Soluzione: La matrice A_1 con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_3 \to R_3 - 2R_2$ si riduce alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_3 \to R_3 + 2R_2$ riducono la matrice A_2 a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.

Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y:

$$S_1 : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Soluzione: S_1 è compatibile ed ammette l'unica soluzione $x = 1/7, y = 2/7$. S_2 è incompatibile, mentre S_3 è equivalente al sistema costituito dall'unica equazione $x - 3y = 1$ che ha infinite soluzioni $x = 1 + 3t, y = t$ dipendenti da un parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9.

Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 6).

Soluzione: Usando 6)

- *S_1 è equivalente al sistema* $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$*, quindi ponendo $z = t$, si ricava $y = 2 + 2t, x = -3 - t$.*
- *S_2 è incompatibile.*
- *S_3 ammette l'unica soluzione $z = 1, y = -1, x = 2$.*

Esercizio 10.

Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} , \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 = 7 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 7).

Soluzione: Utilizzando 7) S_1 è equivalente al sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_3 - 7x_4 = -7 \end{cases}$. *Le variabili che non corrispondono a pivot sono x_2 e x_4. Poniamo quindi $x_2 = t$, $x_4 = s$ e ricaviamo $x_1 = -9 - t + 10s$ $x_3 = -7 + 7s$.*

Sempre utilizzando 7), S_2 è incompatibile.

Esercizio 11.

Si consideri l'insieme M costituito dalle terne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tali che $x - y - z = 2$ e $x + y - z = 2$.

a) Dimostrare che M è un insieme infinito, dipendente da un parametro reale.

Soluzione: Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ha $2y = 0$. Ponendo $z = t$ si ha

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Trovare le terne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$ per la quali $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Soluzione: $2t^2 + 4t + 4 = 16$ ha come soluzioni $t = -1 \pm \sqrt{7}$

c) Trovare la terna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$ per la quale $x^2 + y^2 + z^2$ assume il valore minimo.

Soluzione: $2t^2+4t+4$ è una parabola il cui minimo è il vertice $(-1, 2)$, alternativamente $2t^2+4t+4 = 2(t^2 + 2t + 2) = 2((t + 1)^2 + 1)$ con il secondo fattore somma di due termini sempre non negativi. Il minimo si ottiene per $(t + 1)^2 = 0$.

Esercizio 12.

Si consideri il sistema dipendente dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ay + 5z = 10 \\ 2x + 7y + az = b \end{cases}$$

a) Trovare i valori di a per i quali il sistema è incompatibile.

b) Trovare i valori di b per i quali il sistema ammette infinite soluzioni.

Soluzione: Scrivendo la matrice completa del sistema, applicando l'algoritmo di Gauss con le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_1, R_3 \to aR_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$, si ottiene la matrice completa del sistema a scalini

$$[\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ay + 5z = 10 \\ (a^2 - 2a - 15)z = ab - 6a - 30 \end{cases}$$

equivalente al sistema di partenza.

Per la parte a) Il sistema ammette un'unica soluzione se il coefficiente di z nell'ultima equazione è diverso da zero, quindi per $a \neq 5$ $a \neq -3$.

Per la parte b) Per avere infinite soluzioni, l'ultima equazione deve essere $0 = 0$, e questo avviene solo per $a = 5$ oppure $a = -3$. Nel primo caso il secondo membro della terza equazione si annulla solo per $b = 12$, nel secondo caso solo per $b = 4$.

Esercizio 13.

Assumendo che la proprietà $1 \cdot A = A$ per ogni matrice A (in effetti questa proprietà si verifica direttamente lavorando sui coefficienti) si dimostri che se A è una matrice

- $0 \cdot A = \underline{0}$

  Soluzione: $A = 1 \cdot A = (1 + 0) \cdot A = A + 0 \cdot A$. Quindi siccome esiste l'opposto vale la legge di cancellazione dunque $A = A + 0 \cdot A$ implica $0 \cdot A = \underline{0}$ sommando $-A$ ad ambo i membri del'equazione precedente.

- $-1 \cdot A = -A$ (con $-A$ si intende l'opposto di A).

  Soluzione: $A+(-1 \cdot A) = (1-1)A$ utilizzando la distributività, e il risultato segue dalla parte precedente per l'unicità dell'opposto.

In effetti assumendo una di queste tre proprietà (che possono essere tutte verificate facilmente lavorando con i coefficienti delle matrici) si dimostrano le altre due, ma assumerne una (o dimostrarla lavorando sui coefficienti) è necessario.